PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 18 — 20. September 1942 — Redaktionsschluß für Nr. 19 am 1. Oktober 1942 — 43. Jahrgang

INHALT:

Berichte:

H. Maier-Leibnitz, Die Koinzidenzmethode und ihre Anwendung auf kernphysikalische Probleme. S. 333.

Abhandlungen:

I. Kovács und S. Singer, Über die Wechselwirkung von drei Spektraltermen. S. 362.

Besprechungen. S. 371.

Nachtrag zum Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1942. S. 372.

Nachrichten. S. 372.

BERICHTE

Die Koinzidenzmethode und ihre Anwendung auf kernphysikalische Probleme

Von H. Maier-Leibnitz

Inhaltsverzeichnis

Einleitung.

I. Technik der Koinzidenzmessungen.
1. Zählrohre.
2. Zeitlicher Ablauf einer Zählrohrentladung, Proportionalbereich und Auslösebereich.
3. Zählcharakteristik.
4. Nulleffekt von Zählrohren.
5. Ankopplung an den Verstärker.
6. Aussiebung der Koinzidenzen.
7. Antikoinzidenzschaltung.
8. Registrierung der Ausschlagszahlen.
9. Herstellung der Spannungen für Zählrohre und Verstärker.

II. Methodik der Koinzidenzmessungen.
1. Allgemeines; Prüfung einer Meßreihe auf statistische Reinheit.
2. Messungen mit Nulleffekt; erforderliche Meßzeit.
3. Zählverluste bei großen Stoßhäufigkeiten.
4. Theorie der Koinzidenzmessungen.
5. Wahrscheinlichkeit des Nachweises verschiedener Strahlenarten
a) Nachweis von β-Strahlen.
b) Nachweis von γ-Strahlen.
c) Nachweis von α-Strahlen und Protonen.
d) Nachweis von Neutronen.
e) Ultrastrahlkoinzidenzen
6. Koinzidenzanordnungen.
a) Absorptionsmessungen an sekundären β-Strahlen.
b) Koinzidenzen zwischen schweren Teilchen und γ-Strahlen.
c) γ-γ-Koinzidenzen.
d) β-γ-Koinzidenzen.
e) Koinzidenzen zwischen schweren Teilchen und β-Strahlen.
f) β-β-Koinzidenzen.

III. Anwendung von Koinzidenzmessungen auf kernphysikalische Probleme.
1. Der Comptoneffekt.
2. γ-Energiemessung mit Koinzidenzen.
3. Aussendung von Teilchen- und γ-Strahlung bei der künstlichen Umwandlung von Atomkernen.
4. Natürlicher und künstlicher β-Zerfall mit γ-Strahlung.
5. Andere Messungen.

Einleitung

In den letzten Jahren hat sich zu den bisherigen Untersuchungsmethoden der Kernphysik als wichtiges neues Hilfsmittel die Beobachtung gleichzeitiger Ereignisse gesellt. Zwar haben die Koinzidenzmessungen keinen so überragenden Anteil erreicht, wie das bei der Erforschung der kosmischen Ultrastrahlung der Fall ist. Man kann jedoch erwarten, daß ihre Bedeutung in naher Zukunft noch steigen wird; eine besondere Rolle könnten sie vor allem bei der zu erwartenden quantitativen Vertiefung des heute vorliegenden mehr qualitativen Materials spielen.

Zum erstenmal haben Bothe und Geiger im Jahre 1925 die Koinzidenzmethode angewandt, als sie in einer äußerst sorgfältigen Untersuchung zeigten, daß beim Comptoneffekt der Röntgenstrahlen die Aussendung der Rückstoßelektronen und der Streustrahlung gleichzeitig erfolgt. Der Versuch von Bothe und Geiger bedeutete damals die Bestätigung der Gültigkeit des Energie- und Impulssatzes für den einzelnen Elementarprozeß gegenüber einem theoretischen Versuch von Bohr, Kramers und Slater, dem Energiesatz nur eine statistische Gültigkeit im Mittel über viele Prozesse zuzuschreiben. Schon bei dieser ersten Arbeit wurden auch Koinzidenzen untersucht, die dadurch entstanden, daß ein β-Strahl hintereinander zwei

Zählrohre durchsetzte. Bothe und Kolhörster 1928 bauten darauf eine Methode zur Bestimmung der Absorption sekundärer Elektronen auf, indem sie zwischen die beiden Zählrohre absorbierende Schichten brachten, so daß nur solche β-Strahlen eine Koinzidenz erzeugen konnten, die den Absorber durchsetzt hatten. Während die ersten Arbeiten als Nachweismittel noch den Geigerschen Spitzenzähler verwendeten, konnte jetzt das von Geiger und Müller entwickelte Zählrohr benutzt werden, das den Vorteil größerer Empfindlichkeit und Zuverlässigkeit bot. Geiger und Müller und etwa gleichzeitig Bothe und Kolhörster wandten die neue Methode auf die Ultrastrahlung an, wo sie in der Folgezeit eine so große Bedeutung erlangen sollte. Bothe und Kolhörster untersuchten aber auch die Absorption der sekundären β-Strahlung von *RaC*. Aus der Absorption der sekundären β-Strahlung läßt sich auf die Energie der erzeugenden γ-Strahlung schließen; man hat hier eine direkte Methode zur Messung der γ-Energie. Da sich später herausstellte, daß für harte Strahlen diese Methode zuverlässiger ist als die Bestimmung der Absorption der γ-Strahlung selbst, wurde sie in der Folgezeit sehr häufig auf unbekannte γ-Strahlen angewandt (zuerst von Bothe und Becker, 1932) und ist heute allgemein verbreitet. Entscheidend war dabei eine wesentliche Vereinfachung der experimentellen Methode, die ebenfalls von Bothe (1929) stammt: Bei den ersten Messungen wurden die Ausschläge der einzelnen Zählrohre photographisch auf einem schnellaufenden Film registriert und die Koinzidenzen auf dem Film ausgemessen. Der große Aufwand an Film und Arbeitszeit machte längere Meßreihen unmöglich. Deshalb ersdachte Bothe eine Anordnung, um mit Hilfe von Elektronenröhren nach Wunsch entweder die Ausschläge von einzelnen Zählrohren oder nur die Koinzidenzen zu registrieren. Eine ähnliche Anordnung, die sich auf drei- und mehrfache Koinzidenzen ausdehnen läßt, hat Rossi (1930) entwickelt. Die Koinzidenzverstärker sind nach mannigfaltigen technischen Veränderungen heute zu großer technischer Vollkommenheit entwickelt worden.

Eine neue Anwendung der Koinzidenzmethode wurde von Bothe und v. Baeyer (1935) begonnen. Bei der natürlichen und künstlichen Umwandlung von Elementen kommt es häufig vor, daß gleichzeitig mehrere Strahlenarten, meist Teilchen und γ-Strahlen, ausgesandt werden. Die Untersuchung solcher Kopplungen ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Erforschung der Energiezustände der entstehenden Atomkerne. v. Baeyer untersuchte so die Umwandlung von Bor durch α-Strahlen nach der Gleichung

$$ {}_5B^{10} + {}_2\alpha^4 = {}_6C^{13} + {}_1p^1 + \gamma . $$

Später erweiterte Maier-Leibnitz die Methode durch die Untersuchung des Prozesses

$$ {}_4Be^9 + {}_2\alpha^4 = {}_6C^{12} + {}_0n^1 + \gamma . $$

Dabei treten gleichzeitig Neutronen und γ-Strahlen auf. Außerdem konnte nachgewiesen werden, daß die γ-Aussendung oft in Stufen erfolgt, wobei also Koinzidenzen von zwei γ-Strahlen auftreten. Schließlich wurde schon von Bothe und v. Baeyer, später eingehend von Bothe und Maier-Leibnitz beim natürlichen β-Zerfall von *RaC* die Kopplung der dabei auftretenden γ-Strahlen mit dem β-Spektrum untersucht. Diese Messungen an β-Spektren wurden später auch von anderen Autoren an verschiedenen Elementen vorgenommen, darunter zuerst von Norling an künstlich erzeugten β-Strahlern. Endlich war im Jahre 1936 durch eine Koinzidenzmessung von Shankland die Richtigkeit des Ergebnisses von Bothe und Geiger mindestens im Bereich der γ-Strahlen angezweifelt worden. Durch einen Versuch von Bothe und Maier-Leibnitz konnte am Comptoneffekt harter γ-Strahlung die Gültigkeit des Energiesatzes erneut gezeigt werden, diesmal unter verschärften Bedingungen und unter Anwendung des seither erreichten technischen Fortschritts.

Im folgenden soll über die bisherigen Versuche sowie über den heutigen Stand der Technik und der Methode der Koinzidenzmessungen berichtet werden. Dabei muß auch auf die Methodik der Einzelzählung eingegangen werden, da solche einen wesentlichen Bestandteil jeder Koinzidenzmessung darstellt. In Teil I ist die Technik der Zählrohre und der Verstärker behandelt. Dabei ist keine Vollständigkeit in bezug auf die sehr zahlreiche Literatur angestrebt. Die Entscheidung, von wem irgendeine Verbesserung zuerst eingeführt wurde, ist auch oft unmöglich, weil viele Autoren darauf verzichten, auf technische Einzelheiten in Veröffentlichungen einzugehen. Es sollen hier nur für solche, die sich weniger für Zählrohre und Verstärker selbst als für ihre Anwendung interessieren, ausreichende Hinweise und Daten gegeben werden. Dabei wurde versucht, auch die neueren, noch unzureichend veröffentlichten Fortschritte zu berücksichtigen, die sich auf die Verkürzung der Entladungsdauer sowie auf möglichst große Trennschärfe der ganzen Anordnung für Koinzidenzen beziehen, weil diese Dinge gerade für zukünftige Anwendungen der Koinzidenzmethode in der Kernphysik von Bedeutung zu werden versprechen.

Teil II beschäftigt sich mit den Einflüssen, die bei Koinzidenzmessungen eine Rolle spielen, und vor allem mit der Möglichkeit, aus Koinzidenzmessungen quantitative Aussagen herzuleiten. Hier sind die Möglichkeiten der Methode noch nicht ausgeschöpft, und es ist versucht worden, auch in diesem Abschnitt Gesichtspunkte zu berücksichtigen, die in späteren Untersuchungen eine größere Rolle spielen können als bisher. Vielfach fehlt es jedoch dazu noch an experimentellen Grundlagen.

In Teil III endlich werden die bisherigen Arbeiten aus den verschiedenen Anwendungen der Koinzidenzmethode besprochen.

I. Technik der Koinzidenzmessungen

1. Zählrohre

Zum Nachweis der Strahlen bei Koinzidenzmessungen dienen fast ausschließlich Zählrohre nach Geiger und Müller (1928). Die am leichtesten herzustellende und wohl verbreitetste Bauart zeigt Fig. 1: ein zylindrisches Metallrohr,

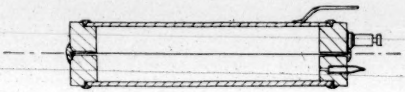

Fig. 1. Einfaches Zählrohr.

vorzugsweise aus Zink oder Messing mit etwa 1 mm Wandstärke, für β-Strahlmessungen aus Aluminium von 0,1 mm, Hartgummiisolatoren, in der Achse der Zähldraht aus Nickel oder Wolfram, Stahl, Platin, Aluminium mit einem Durchmesser von etwa 0,1 mm. Die Innenmaße des Zählers sind weitgehend frei wählbar, am häufigsten ist ein Durchmesser von etwa 2 cm bei einer Länge von 5—8 cm. Zählrohre unter 8 mm Durchmesser werden selten verwendet. Zur Dichtung der Zählrohre wird mit Vorteil Pizein verwandt. Als Gasfüllung dient gefilterte Luft oder Argon mit einem Druck von 5 bis 10 cm *Hg*, neuerdings oft mit Zusatz von etwa 1,5 cm Alkoholdampf. Solche Zählrohre erfordern eine Betriebsspannung um 1000 V, dabei ist der Draht positiv.

In der Literatur findet sich eine Unzahl von besonderen Vorsichtsmaßnahmen, um ein gutes Arbeiten solcher Zähler zu erreichen. Die meisten dieser Maßnahmen sind unnötig, wenn man nicht besondere Anforderungen an die Zähler stellt. Nach unseren Erfahrungen funktioniert ein Messingzähler stets, wenn nicht Staubteilchen am Draht oder der Zählwand hängen. Aluminiumzähler scheinen besser zu gehen, wenn die Wand durch Erwärmen oder mit Wasserstoffperoxyd oxydiert ist (Curran und Petrcilka, 1939). Aluminiumzähler mit *Al*-Draht arbeiten schlecht. Polierte Flächen sind bei *Al* ungünstig. Die Zähldrähte werden meist vor dem Einbau ausgeglüht. Die Lebensdauer von Zählrohren mit Alkoholzusatz ist manchmal auf einige Wochen begrenzt, dann hilft eine Neufüllung, die wenig Mühe macht. Bei sehr kleinen Zählrohren können Schwierigkeiten durch die zu kurze Isolationsstrecke entlang dem Hartgummi im Zählrohr entstehen. Sie werden dadurch vermieden, daß die Hartgummistopfen innen kugelförmig ausgedreht werden. Viele Zähler zeigen eine gewisse lichtelektrische Empfindlichkeit, deshalb ist der Zutritt von Licht ins Innere zu verhindern.

Andere Ausführungsformen. Sehr häufig werden heute abgeschmolzene, ganz in Glas eingeschlossene Zählrohre verwendet. Es lassen sich dann die Methoden der Hochvakuumtechnik anwenden und man kann gut definierte Verhältnisse für die Gasfüllung und für die Oberflächen erhalten (siehe z. B. Montgomery und Montgomery, 1941). Allerdings wird sich bei der Kernphysik, im Gegensatz zur Ultrastrahlung, bei den sehr vielfältigen Anforderungen z. B. die Verwendung gekitteter Fenster nicht ganz vermeiden lassen, man wird hier auch weiterhin zum Teil mit nicht abgeschmolzenen Zählrohren arbeiten müssen. Bei der Verwendung von Glas ist zu beachten, daß Thüringer Glas meist etwas radioaktiv ist. Besser ist z. B. Jenaer Normalglas. Für dünnwandige Zählrohre läßt sich eine Glaswandstärke von 0,1—0,2 mm erreichen. Das Glas wird dann durch einen Überzug z. B. von kolloidalem Graphit leitend gemacht. Möglich ist auch die Verwendung von Metall-Glasverbindungen, damit lassen sich sowohl dick- als dünnwandige Zählrohre herstellen. Curran und Petrcilka (1939) verwenden für dünnwandige Zählrohre Glas nur statt der Hartgummistopfen und kitten mit Pizein. Damit erzielen sie eine hohe Lebensdauer auch für alkoholgefüllte Zählrohre.

Für weiche β-Strahlen werden meist Fensterzählrohre verwendet. Ein Teil der Wand eines dickwandigen Zählrohrs ist ausgespart und durch eine dünne Folie (Aluminium, Glimmer, Cellophan) ersetzt. Zur Unterstützung der Folie kann innen ein Gitter angebracht werden. Bei Glimmer muß bei größeren Fenstern durch eine Metallfolie (Aluminium oder Goldblatt) die leitende Zählrohrfläche hergestellt werden, bei Cellophan ist das nicht notwendig. Die Störung der Symmetrie des Zählrohrinnern durch ein Fenster ist bei einem normalen Zählrohr unerheblich. Zur Vermeidung toter Winkel kann eine Metallfolie eingelegt werden. Bei Glimmer können Blättchen von 1—4 mg/cm² über einer

Fläche von 1 cm im Quadrat frei gespannt oder das Gehäuse an einem konstanten Potential werden. Dabei ist es besser, die Folien auf einer nach außen konkaven Zylinderfläche als auf einer ebenen Fläche zu kitten (Arnold u. a. 1939).

Sehr dünnwandige Zähler kann man dadurch haltbar machen, daß man sie mit Atmosphärendruck betreibt. Dabei ist bei Füllung mit Argon eine Spannung von 2000—2500 Volt erforderlich. Bei solchen Zählern muß man mehr als bei andern auf Gleichmäßigkeit der Wände und des Zähldrahts achten (Norling, 1941). Die Zählrohrwand kann auch durch ein Drahtnetz ersetzt werden, so daß überhaupt kein Absorber mehr zu durchsetzen ist. Als Wandmaterial für Zähler kommen Metalle jeder Art in Betracht. Besonders häufig verwendet werden Aluminium, Messing, Zink, Kupfer und Blei. Blei ist meist etwas radioaktiv durch einen Gehalt an seinem Isotop *RaD* (Halbwertzeit 25 Jahre). Daher ist es günstig, altes Blei zu verwenden.

Der Zähldraht wird für normale Zählrohre meist dünn (um 0,1 mm) gewählt. Dies ist jedoch nicht notwendig. Schon Geiger und Müller 1929 geben an, daß man dafür Rohre bis zu mehreren cm Durchmesser verwenden kann. v. Baeyer (1935) und Maier-Leibnitz (1936) verwenden dünnwandige versilberte Quarzröhrchen von etwa 2 mm Durchmesser, um darin die Strahlenquelle samt Absorbern unterzubringen.

Besonders viel hat man sich mit der Frage der Gasfüllung beschäftigt. Fast alle nicht zersetzbaren Gase sind zur Füllung von Zählrohren geeignet, wenn auch nicht alle gleich gut. Heute besonders gebräuchlich sind Füllungen mit Luft oder mit einem Argongemisch. Einige Autoren verwenden auch Wasserstoff, der jedoch gewisse Vorsichtsmaßregeln erfordert (siehe z. B. Duffendack u. a., 1937, Montgomery und Montgomery, 1941). Vielfach untersucht sind Zählrohre mit 94 Proz. Argon und 6 Proz. Sauerstoff (z. B. Montgomery und Montgomery, 1941). Einen bedeutenden Fortschritt hat die Verwendung von Zählrohren mit Dampfzusatz gebracht. Wir werden weiter unten verschiedentlich auf den Einfluß der Gasfüllung zurückkommen.

Ausführlichere Angaben über die Abhängigkeit der Einsatzspannung eines Zählrohrs von der Gasfüllung finden sich z. B. bei Klemperer (1928), für Zählrohre mit Dampfzusatz bei Trost (1937), ferner bei Montgomery und Montgomery (1941).

2. Zeitlicher Ablauf einer Zählrohrentladung

Wir betrachten zunächst ein Zählrohr zusammen mit einem sehr hohen Widerstand von 10^9—$10^{10}\,\Omega$, über den entweder der Zähldraht liegt. Durch den Durchgang eines ionisierenden Strahls mögen im Gasraum des Zählrohrs ein oder mehrere Ionenpaare entstehen; bei kleinen Spannungen werden die Ionen aus dem Gas an die Elektroden wandern, man erhält nur einen kleinen Ionisationsstromstoß. Bei größerer Spannung fangen die Elektronen an, auf ihrem Weg zur Anode (dem Zähldraht) im Bereich des stärksten Feldes, also kurz vor dem Draht, durch Elektronenstoß neue Ionen zu bilden. Der Ionenstrom wird dadurch verstärkt, und zwar um so mehr, je höher die Spannung ist. Dabei ist die Größe der einzelnen Ausschläge proportional der Zahl der primär gebildeten Ionen. Man spricht daher vom Proportionalbereich und nennt einen Zähler, der in diesem Bereich betrieben wird, Proportionalzähler. Der Proportionalbereich wird beendet durch das Einsetzen des Auslösebereichs, in dem durch die primäre Ionisierung eine kurze Koronaentladung ausgelöst wird. Dabei sind die Ausschläge wesentlich größer als im Proportionalbereich und hängen nicht mehr von der Größe der primären Ionisation ab. Im einzelnen hat man sich den Vorgang der Zählung eines Elektrons im Auslösebereich etwa folgendermaßen vorzustellen: Ein primär entstandenes Elektron wandert im elektrischen Feld rasch unter vielen Stößen mit den Gasmolekülen auf den Draht zu. In der Umgebung des Drahtes ist die Feldstärke groß genug, um die Ionisierung der gestoßenen Moleküle zu ermöglichen. Es entsteht eine Townsendsche Elektronenlawine. Durch dabei ausgesandte kurzwellige Strahlung breitet sich die Ionisation auf das ganze Gebiet großer Feldstärke um den Draht aus (Greiner, 1933). Die entstandenen Elektronen wandern rasch auf den Draht ab. Die positiven Ionen sind wesentlich langsamer, sie bilden zunächst eine Raumladung, die das Feld schwächt und den Ionisierungsvorgang beendet. Die Zeit bis zu diesem Zustand beträgt bei kleinen Zählrohren etwa 10^{-7} sec. Die Spannung am Draht hat sich bis da noch kaum geändert, da die meisten der bisher allein beteiligten Elektronen nur eine kleine Entfernung von Drahtnähe bis zum Draht zurückgelegt haben. Nun laufen die positiven Ionen in 10^{-6} bis 10^{-5} sec nach der Kathode. In dieser Zeit sinkt die Spannung am Draht, und zwar um so mehr, je kleiner die beteiligte Kapazität ist. Dabei kann sogar die Einsatzspannung des Zählrohrs unterschritten werden. In diesem Fall ist die Entladung beendet. Denn wenn die positiven Ionen bei der Ankunft an der Kathode neue Elektronen auslösen, werden diese keine neue Entladung hervorrufen können. Dieses Unterschreiten der Einsatzspannung ist schon von Medicus 1932

beobachtet worden. Bei größerer Kapazität wird die Einsatzspannung nicht erreicht, hier kann die Entladung neu einsetzen, man erhält einen stufenförmigen Ausschlag von längerer Dauer. Es ist also günstig, mit Kapazitäten kleiner als etwa 20 pF zu arbeiten. Bei den Zählrohren mit Dampfzusatz nach Trost sind die Nachentladungen unterdrückt, man erhält sehr kurze ungestaffelte Ausschläge auch bei größeren Kapazitäten.

Auf eine für Koinzidenzmessungen wichtige Erscheinung muß noch hingewiesen werden: Nach der hier gegebenen Darstellung, die im wesentlichen Montgomery und Montgomery 1940 folgt, müßte beim Durchgang eines ionisierenden Teilchens die Entladung stets innerhalb von etwa 10^{-7} sec einsetzen. Dies ist jedoch nicht der Fall. Nach Messungen von Dunworth 1939 und von Montgomery u. a. 1939 treten Zeitverzögerungen der Größenordnung 10^{-6} sec auf. Montgomery und Montgomery 1941 (a) erklären diese Verzögerungen dadurch, daß die primär ausgelösten Elektronen auf ihrem Weg zum Draht teilweise eingefangen werden (die Zählröhre enthielt etwas Sauerstoff) und so ein Stück ihres Wegs als Ionen langsam zurücklegen. Bei reiner Sauerstoffüllung treten noch größere Verzögerungen bis 10^{-4} sec auf (Rose und Ramsey 1941).

3. Zählcharakteristik

Wir betrachten hier nur den Auslösebereich. Fig. 2 zeigt die Zählcharakteristik eines guten Zählrohrs bei Bestrahlung mit einer schwachen

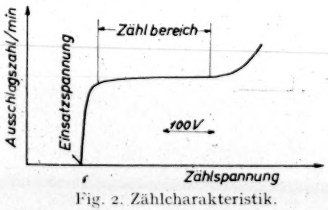

Fig. 2. Zählcharakteristik.

Strahlenquelle. Bei der Einsatzspannung von Null ansteigend bleibt die Stoßzahl über einen größeren Spannungsbereich fast konstant, um dann erneut rasch anzusteigen. Im Gebiet des ersten Anstiegs ist die Spannung noch nicht ausreichend, um aus jedem ausgelösten Elektron einen Ausschlag zu erzeugen. In dem horizontalen Teil dagegen führt tatsächlich jeder Strahl, der im Zählrohrinnern ein Elektron frei macht, zu einem Ausschlag. Dies ist durch Messungen nachgewiesen worden, die weiter unten bei der Behandlung der β-Empfindlichkeit besprochen werden. Eine Ausnahme machen lediglich die Enden des Zählrohrs, an denen die Empfindlichkeit abnimmt, so daß man ungefähr 5—10 Proz. des Zählvolumens abziehen muß, um den empfindlichen Raum zu berechnen. Dieser Bruchteil hängt von der Höhe der Zählspannung über der Einsatzspannung ab; er wird mit wachsender Spannung kleiner. Dadurch wird mindestens zum größten Teil der leichte Anstieg des flachen Teils der Zählcharakteristik für nicht ausgeblendete Strahlen erklärt. Die Zunahme der Empfindlichkeit des Zählrohrendes mit wachsender Spannung zeigen z. B. die Messungen von Jorgensen 1939 mit einem ausgeblendeten Gammastrahl.

Der zweite starke Anstieg der Zählcharakteristik bedeutet das Ende des Zählbereichs. Die Zunahme der Ausschläge rührt zum Teil von Nachentladungen hinter den einzelnen Ausschlägen, zum Teil von Spontanentladungen durch Feldemission. Die Breite des Zählbereichs hängt auch vom Widerstand am Zählrohr, bzw. von der Art der Ankopplung des Verstärkers ab; siehe dazu den nächsten Abschnitt. Bei einem nicht besonders behandelten Zählrohr in normaler Schaltung beträgt er etwa 100 Volt, manchmal auch weniger. Zählrohre mit Dampfzusatz nach Trost, sowie Zählrohre in besonderen Schaltungen haben Zählbereiche von mehreren hundert Volt.

4. Nulleffekt von Zählrohren

Auch nach Entfernen aller künstlichen Strahlenquellen zeigt ein Zählrohr im Auslösebereich noch eine gewisse Zahl von Ausschlägen, den Nulleffekt. Er wird verursacht erstens durch die ionisierenden Teilchen der Ultrastrahlung, zweitens durch radioaktive Strahlung der Umgebung des Zählrohrs und eventuell des Zählrohrs selbst. Der erste Anteil läßt sich ungefähr angeben. Die Zahl der auf den cm^2 auftreffenden Ultrastrahlteilchen ist $1{,}5/cm^2 min$ (z. B. Street und Woodward). Der Anteil der Umgebungsstrahlung ist, örtlich verschieden, etwa ebenso groß oder größer. Durch Panzerung des Zählrohrs mit einigen cm Blei läßt sich der Nulleffekt auf etwa die Hälfte herabsetzen, hinter 20 cm Eisen ist er noch etwa ein Fünftel (Geiger und Müller 1929). Die Eigenaktivität der Zählrohrwände beträgt nach Messungen im Bergwerk rund 2 Ausschläge je cm^2 und Stunde (Bothe und Kolhörster).

Bei Zählung schwerer Teilchen mit Proportionalzählrohren entsteht ein Nulleffekt fast nur durch radioaktive Verunreinigung des Zählrohrinnern. Der Nulleffekt ist hier meist kleiner als 0,1 Ausschläge je Minute und cm^2 der Innenfläche.

5. Ankopplung an den Verstärker

Fig. 3a zeigt die bisher meist gebräuchliche Verbindung eines Zählrohrs mit einem hohen Widerstand und Ankopplung an den Verstärker durch eine kleine Kapazität. Der hohe Widerstand ist nötig, um den Zählbereich nicht zu klein werden zu lassen[1]). Die Ankopplung durch die Kapazität ist wegen des zu niedrigen Gitterableitwiderstandes der Röhren nötig.

Bei den Zählrohren mit Dampfzusatz nach Trost, die mit Widerständen bis unter 10000 Ω betrieben werden können, kann das Zählrohr direkt an das Gitter der ersten Röhre gekoppelt werden, Fig. 3b. Die Ausschläge sind dann sehr kurz (etwa 10^{-4} sec) und alle gleich groß.

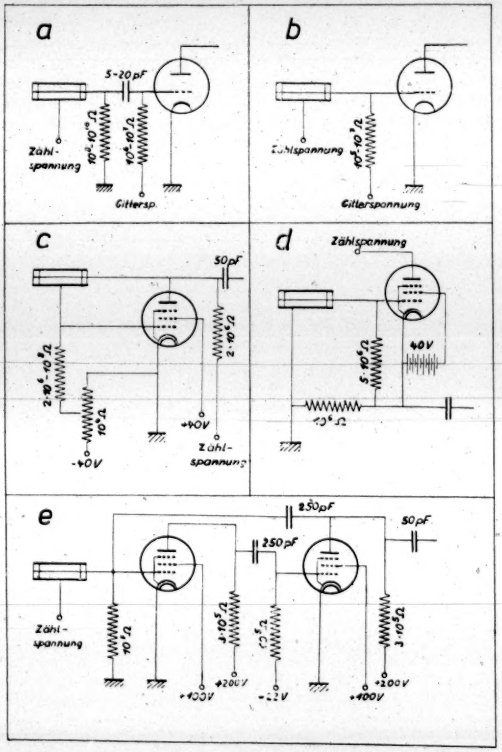

Fig. 3. Ankopplung des Zählrohres an den Verstärker. *a* Durch eine kleine Kapazität unter möglichst geringer Rückwirkung auf das Zählrohr. *b* Direkte Ankopplung für Zählrohre, die mit kleinem Ableitwiderstand betrieben werden können. *c* Schaltung von Neher und Harper. Abreißen der Entladung durch den einsetzenden Anodenstrom der Röhre. *d* Schaltung von Neher und Pickering. Variante von *c*, bei der die Außenwand des Zählrohres geerdet werden kann. *e* Schaltung von Getting. Multivibrator. Abreißen der Entladung durch den Spannungsstoß an der Anode der zweiten Röhre. Wiederherstellung der Spannung durch die Rückschwingung des Multivibrators.

Noch vor dem Bekanntwerden der Trostschen Zählrohre haben Neher und Harper 1937 eine Methode angegeben, um die Eigenschaften der Zählrohrentladung mit Hilfe des Verstärkers zu verbessern, indem die Entladung künstlich von außen her zum Abreißen gebracht wird. Ihre Schaltung zeigt Fig. 3c. Das Zählrohrgehäuse liegt am Gitter der ersten Röhre, der Draht an der Anode (die Anode muß also die ganze Zählspannung aushalten). Vor dem Zählstoß ist die Röhre annähernd stromlos; beim Einsetzen der Entladung steigt durch den Spannungsabfall am Gitterwiderstand die Spannung am Gitter, und durch den einsetzenden Anodenstrom bricht die Spannung am Zählrohr zusammen. Dadurch wird die Entladung am Zählrohr abgerissen, auch wenn der Ohmsche Widerstand dafür nicht ausreichen würde. Die Dauer der Entladung kann also durch Verwendung eines kleinen Widerstandes klein gemacht werden. Praktisch erreicht man etwa 10^{-4} sec. Die Größe des notwendigen Gitterwiderstandes wechselt von $10^8\,\Omega$ für kleine Zählrohre bis $2 \cdot 10^6\,\Omega$ für große Zählrohre. Dabei ist es wesentlich zur Erzielung einer kurzen Ausschlagsdauer, daß die Kapazität am Zählrohr klein gehalten wird. Die Schaltung von Neher und Harper hat sich vielerorts bewährt und kommt heute verbreitet auch in Koinzidenzschaltungen zur Anwendung.

Neher und Pickering 1938 haben eine Variante dieser Schaltung beschrieben (Fig. 3d), die den Vorteil hat, daß die Außenwand des Zählrohrs geerdet ist, daß also keine

1) Man hat sich den Zählvorgang als eine instabile Koronaentladung vorzustellen. Oberhalb einer Stromstärke von etwa 1,5 μA brennt die Entladung etwa bei der Einsatzspannung stabil. Das muß durch entsprechende Wahl des Widerstandes und der Zählspannung vermieden werden. Siehe dazu Werner 1934.

Abschirmung nötig ist und die Kapazität nicht unnötig groß wird. Außerdem braucht bei dieser Anordnung die Röhre nicht die ganze Zählspannung auszuhalten. Der Nachteil dieser Anordnung ist, daß die Heizung und die Schirmgitterspannung der Röhre nicht an Erde liegen.

Ein anderes Prinzip, um die Zählrohrentladung abzureißen, hat Getting 1938 verwendet[2]). Seine Schaltung zeigt Fig. 3e. Der negative Stoß, der durch die Zündung der Zählrohrentladung am ersten Gitter entsteht, wird zweimal verstärkt und von der Anode der zweiten Röhre wieder auf den Zähldraht und das erste Gitter zurückgeworfen. Dadurch wird der Zähldraht stark negativ, so daß die Entladung abreißt. Über den Gitterwiderstand wird die Zählspannung wieder hergestellt; auch dieser Vorgang wird über die zweite Anode verstärkt. Die Schaltung der beiden Röhren stellt einen Multivibratorkreis dar, der so eingestellt ist, daß er normalerweise nicht schwingen kann; erst durch die Zählrohrentladung wird eine Schwingung möglich. Die Form und die Zeitdauer dieser Schwingung hängt nur vom Verstärker, nicht von den Eigenschaften und der Spannung des Zählrohrs ab. Das ist für die Bestimmung zufälliger Koinzidenzen von Vorteil. Ein Nachteil ist, daß beim Anlegen der Zählspannung leicht eine Dauerentladung im Zählrohr gezündet wird. Die Zählspannung muß daher immer rasch angelegt werden. Auch scheint der Abreißmechanismus nicht so wirksam zu sein wie bei Neher-Harper. Auch mit dieser Anordnung ist die Entladungsdauer auf etwa 10^{-4} sec gebracht worden.

Eine Kombination dieser Gettingschen Schaltung mit der von Neher-Harper haben Mc Master und Pool 1940 mit gutem Erfolg verwendet.

6. Aussiebung der Koinzidenzen

Bothe und Geiger haben bei der ersten Untersuchung gleichzeitiger Ereignisse die Ausschläge von zwei Zählrohren mit zwei Elektrometern nachgewiesen und die Bewegungen der Elektrometerfäden gleichzeitig auf einem Film registriert. Die Gleichzeitigkeit zweier Ausschläge konnte damit bis auf etwa 10^{-3} sec und mit einem Kunstgriff bis auf 10^{-4} sec nachgewiesen werden. Dabei mußte jedoch der Film eine beträchtliche Geschwindigkeit haben, so daß große Filmmengen zu verarbeiten und auszuwerten waren. Deshalb wurde diese prinzipiell einfachste Methode bald verlassen, obwohl sie den Vorteil bietet, außer „genauen" auch „verzögerte" Koinzidenzen zu erfassen. Bothe 1929 veröffentlichte den ersten Röhrenverstärker für Koinzidenzmessungen, Fig. 4a. Die Ausschläge der beiden Zählrohre, die die gleichzeitigen Ereignisse registrieren, werden erst in einer Röhre verstärkt und verkürzt und dann den beiden Gittern einer Doppelgitterröhre zugeleitet; diese haben eine negative Vorspannung, so daß im Ruhezustand kein Strom zur Anode fließt. Durch die Entladung eines Zählrohrs empfängt

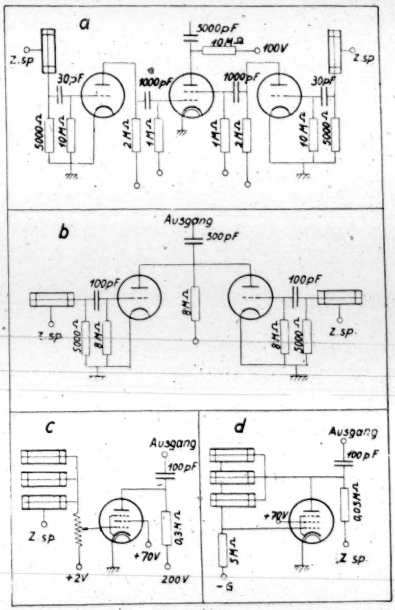

Fig. 4. Aussiebung von Koinzidenzen. *a* Erster Koinzidenzverstärker von Bothe. *b* Rossi-Schaltung. *c* Einfache Schaltung von Ehmert und Trost für Zählrohre, die mit kleinem Ableitwiderstand betrieben werden können. *d* Schaltung von Herzog und Weber

eines der beiden Gitter einen positiven Spannungsstoß. Damit jedoch ein Strom in der Röhre entsteht, ist es notwendig, daß während der Dauer dieses Stoßes auch das zweite Gitter durch eine Entladung des andern Zählrohrs positiv wird. Es werden also nur solche Stöße gezählt, die entweder wirklich gleichzeitigen Entladungen beider Zählrohre entsprechen oder bei denen zufällig zwei Entladungen der beiden Zählrohre innerhalb der Dauer des positiven Spannungsstoßes am Gitter zusammentreffen.

2) Siehe auch Barnothy 1936.

Diese Dauer ist eine Konstante des Verstärkers, die sogenannte Auflösungszeit für Koinzidenzen. Zur Verringerung der „zufälligen" Koinzidenzen ist es wünschenswert, diese Auflösungszeit möglichst kurz zu machen. Bei dem beschriebenen Verstärker betrug sie $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ sec. Das ist etwa 100mal weniger als die normale Dauer eines Zählrohrausschlags am Elektrometer. Die Verkürzung erfolgt durch die Ankopplung über einen kleinen Kondensator[3]), bei der im wesentlichen nur der rasche Spannungsabfall am Zählrohr übertragen wird und nicht der langsame Wiederanstieg. Dabei ist auch noch die Größe der beiden Widerstände von Bedeutung. Je kleiner der Widerstand am Gitter ist, desto kürzer wird auch der Spannungsstoß am Gitter.

Später hat Rossi (1930) eine andere Schaltung eingeführt, siehe Fig. 4b. Die Gitter haben eine positive Vorspannung. Beide Röhren sind voll ausgesteuert; der gesamte Spannungsabfall liegt am gemeinsamen Anodenwiderstand. Daran ändert sich nichts, wenn eine Röhre durch einen negativen Zählstoß auf das Gitter stromlos wird. Nur wenn die Gitter beider Röhren gleichzeitig negativ werden, fließt kein Strom mehr über den Widerstand, es entsteht ein positiver Spannungsstoß an den Anoden. Die Dauer der Spannungsstöße am Gitter wird ebenso wie bei Bothe durch den Kopplungskondensator verkürzt. Wenn eine Seite abgeschaltet ist, werden die Einzelausschläge der anderen gezählt. Durch Anschalten weiterer Stufen können ebenso dreifache, vierfache usw. Koinzidenzen gezählt werden.

Das Prinzip der Rossi-Schaltung hat mit mehrfachen Variationen heute eine allgemeine Verbreitung erreicht. Meist wird durch Vorschaltung von einer oder zwei Röhren vor der Koinzidenzstufe und durch Verwendung passender Kapazitäten eine Verstärkung der Zählrohrausschläge und anschließend ihre Verkürzung erreicht. Auch kann damit eine Schaltung zum Abreißen der Zählrohrentladung verbunden werden. Solche Verstärker sind ausführlich beschrieben z. B. bei Norling 1941, Curran und Petrcilka 1939.

Hier soll nur noch auf zwei Anordnungen hingewiesen werden, die sich durch besondere Einfachheit auszeichnen. Die erste stammt von Ehmert und Trost 1936 und benützt die guten Zähleigenschaften von Zählrohren mit Alkoholzusatz. Solche Zählrohre können mit einem sehr geringen Widerstand betrieben werden. Die Dauer der Ausschläge ist dann sehr kurz. Außerdem sind alle Ausschläge gleich groß. Daher genügt die einfache Anordnung der Fig. 4c; die Zählrohre (zwei bis vier) sind parallel an das Gitter der ersten Röhre angeschlossen. Die zweite Röhre ist ein Thyratron, dessen Gitter eine solche Vorspannung hat, daß gleichzeitige Stromstöße von 2, 3 oder 4 Zählrohren nötig sind, um es zu zünden. Mit diesem einfachen Verstärker erreichen Ehmert und Trost eine Auflösungszeit von $2 \cdot 10^{-5}$ sec.

Die andere einfache Anordnung (Fig. 4d) stammt von Herzog und Weber 1937 und benützt die Neher-Harper-Schaltung. Auch hier sind die Koinzidenzzählrohre parallel geschaltet. Durch den Zählstoß eines Zählrohrs wird der Abreißmechanismus betätigt, der alle Zählrohre kurzzeitig unempfindlich macht. Eine gleichzeitige Entladung zweier oder mehrerer Zählrohre kann also nur durch eine echte Koinzidenz entstehen oder dadurch, daß innerhalb der kurzen Zeit, die zur Auslösung des Abreißens nötig ist, zufällig mehrere Zählrohre zünden. Die Auflösungszeit dieses Verstärkers ist deshalb sehr kurz, etwa $4 \cdot 10^{-6}$ sec. Die Trennung der großen Koinzidenz- von den kleinen Einzelausschlägen geschieht wieder durch die Gittervorspannung der zweiten Röhre. Goos und Ehmann 1940 haben mit einem Verstärker derselben Bauart $1{,}2 \cdot 10^{-6}$ sec erreicht.

Eine kleine Auflösungszeit ist nur so lange von Nutzen, als dabei keine systematischen Koinzidenzen ausgelassen werden. Das Auflösungsvermögen einer Anordnung ist heute nicht durch den Verstärker, sondern durch die Eigenschaften der Zählrohre begrenzt.

7. Antikoinzidenzschaltung

Wie später gezeigt wird, ist es oft erwünscht, störende Koinzidenzen, die von der Ultrastrahlung stammen, möglichst zu entfernen. Dabei sind wie gewöhnlich zwei Zählsysteme in Koinzidenz geschaltet. Ein drittes ist so angefügt, daß Koinzidenzen aller drei Systeme ausgeschaltet werden. Das läßt sich durch optische Registrierung der Zweifachkoinzidenzen sowie der Einzelausschläge des dritten Zählrohrs erreichen (Hilgert 1935). Die erste rein elektrische Schaltung hat Buch Andersen 1936 angegeben. Wir bringen hier eine einfache neuere Methode von Herzog 1940 (Fig. 5). Die nach dem Neher-Harper-Verfahren verstärkten Stöße eines Zählrohrs können entweder an der Anode oder am Gitter abgenommen werden; im ersten Fall sind sie negativ, im zweiten positiv. Solche Stöße werden nun der Rossi-Schaltung zugeführt, wobei die Koinzidenzröhren wie üblich Strom führen und negative Stöße erhalten, während die Antikoinzidenzröhre im Ruhezustand stromlos ist und positive

[3]) Bothe hat diese Schaltung auch mathematisch behandelt.

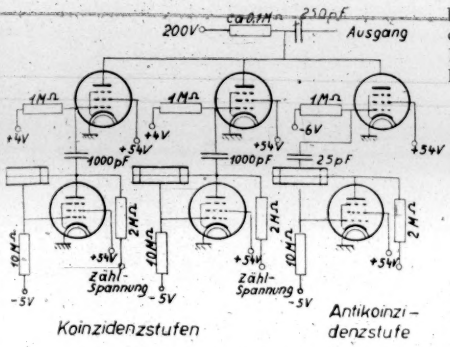

Fig. 5. Antikoinzidenzschaltung.

Stöße erhält. Bei passender Wahl des gemeinsamen Anodenwiderstands der drei Röhren erfolgt ein genügender Spannungsstoß an ihm nur bei gleichzeitigem Ansprechen der beiden Koinzidenzzählrohre, nicht aber bei einer Dreifachkoinzidenz, weil dann ja in der Antikoinzidenzröhre Strom fließt. Die Anordnung arbeitet, wie Herzog geprüft hat, vollkommen zuverlässig.

8. Registrierung der Ausschlagszahlen

In den ersten Arbeiten wurden die Zählrohr- oder Koinzidenzausschläge einem Elektrometer zugeführt und photographisch registriert. Später wurden mechanische Zählwerke eingeführt (zuerst wohl von Geiger und Müller 1929). Bothe 1929 verstärkt bei seinem ersten Koinzidenzverstärker den Strom in einer Endröhre und betätigt damit ein Relais, das wieder einen Telefongesprächszähler steuert. Mit modernen Endröhren und etwas umgebauten Gesprächszählern kann man auf das Relais verzichten. Man muß allerdings vor der Endröhre die sehr kurzen Koinzidenzausschläge wieder verlängern, was z. B. durch eine Kapazität parallel zum Gitterwiderstand einer Zwischenröhre möglich ist (z. B. Norling 1941), oder durch Verwendung des Multivibrators (Fig. 3b, z. B. Neher 1939). Neuerdings ersetzt man oft die Endröhre durch ein Thyratron, das mit sehr kleinen und kurzen Impulsen gesteuert werden kann. Fig. 6 zeigt eine gebräuchliche Schaltung. Durch einen positiven Stoß am Gitter zündet das Thyratron und entlädt einen Kondensator, bis es erlischt. Über das Zählwerk und einen zusätzlichen Widerstand wird der Kondensator wieder aufgeladen und dabei das Zählwerk zum Ansprechen gebracht.

Mit einem umgebauten Gesprächszähler (mit auf ein Fünftel verkleinertem Hub) ist der kleinste Zeitraum zwischen zwei Ausschlägen, die Auflösungszeit, etwa $^1/_{50}$ sec. Ein von Flammersfeld 1936 angegebenes Zählwerk hat etwa $^1/_{200}$ sec Auflösungszeit, ein von Neher

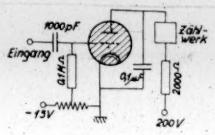

Fig. 6. Thyratron als Endröhre.

1939 beschriebenes $0{,}8 \cdot 10^{-3}$ sec. Damit gehen bei 6000 Ausschlägen/min etwa 10 Proz. der Ausschläge verloren.

Größere Häufigkeiten der Einzelausschläge, als das Zählwerk bewältigen kann, können gezählt werden, wenn die Ausschlagszahl vor dem Zählwerk herabgesetzt wird. Die älteste Methode, die zuerst auf die Zählung von α-Strahlen im Proportionalverstärker angewandt wurde, beruht auf einer Teilung der Ausschlagszahl durch Vielfache von zwei mit Hilfe von Thyratronröhren (Wynn-Williams 1931). Später wurde dasselbe Prinzip auf Vakuumröhren übertragen, die nicht wie die Thyratrons längere Zeit brauchen, bis nach dem Stromdurchgang die Röhre ionenfrei ist (Lewis 1937, Stevenson und Getting 1937). In Fig. 7 ist eine Variante dieser Schaltung von Reich 1939 gezeigt, die weniger Röhren benötigt als die anderen Schaltungen[4]). Fig. 7 zeigt eine Stufe, die die Ausschlagszahl

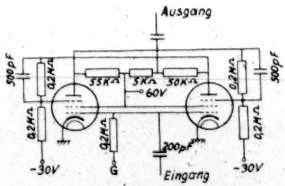

Fig. 7. Stufe eines Stoßzahluntersetzers.

halbiert. Die Schaltung ist für beide Röhren symmetrisch. Durch die Kopplung der Bremsgitter mit den Anoden der Gegenröhre ist erreicht, daß nur zwei Zustände stabil sind: Entweder fließt in der linken Röhre Strom und die rechte ist stromlos, oder beides ist umgekehrt. Durch einen negativen Spannungsstoß auf die Steuergitter springt die Schaltung in den anderen Zustand um. Dabei erhält der Kondensator

4) Die Schaltung von Forsman 1938 erfordert ebenfalls nur zwei Röhren je Stufe.

am Ausgang abwechselnd positive und negative Impulse, von denen nur die negativen, also jeder zweite, die nächste Stufe betätigen. Dieses Prinzip läßt sich beliebig oft wiederholen und ist bis zu 128facher Untersetzung getrieben worden.

Ferner sind zahlreiche Schaltungen angegeben worden, die meist die Ausschläge benützen, um einen Kondensator aufzuladen, der nach einer gewissen Stoßzahl durch ein Glimmrohr entladen wird (siehe z. B. Teichmann 1937, Johnson 1938, Weiß 1939).

9. Herstellung der Spannungen für Zählrohre und Verstärker

Die Spannungen für Verstärker können mit Batterien oder mit einem Netzanschlußgerät hergestellt werden. Dabei finden mit Vorteil Stabilovoltröhren Verwendung. Auch für die Konstanz der Zählspannung sind Glimmröhren

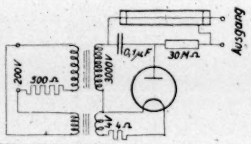

Fig. 8. Stabilisator zur Herstellung der Zählgleichspannung nach Medicus.

günstig. Fig. 8 zeigt eine oft gebrauchte Schaltung, die von Medicus 1933 stammt. Das Glimmrohr hat die Form eines langen Zählrohrs; die Brennspannung wird mit Hilfe des Drucks der Luftfüllung variiert. Man kann ebenso auch hintereinandergeschaltete Glimmlampen verwenden und die gewünschte Spannung an einem Potentiometer parallel zu einer Lampe abgreifen. Beim Betrieb mit Anodenbatterien stört manchmal die starke Temperaturabhängigkeit ihrer Spannung.

II. Methodik der Koinzidenzmessungen

1. Allgemeines: Prüfung einer Meßreihe auf statistische Reinheit

Alle Zählrohrmessungen sind statistische Messungen. Sind in einer bestimmten Zeit m Ereignisse zu erwarten, so werden tatsächlich n Ereignisse gemessen werden, wobei die Wahrscheinlichkeit eines solchen Resultates gegeben ist durch die Poissonsche Gleichung:

$$p(m, n) = \frac{m^n}{n!} e^{-m}. \qquad (1)$$

Fig. 9 gibt eine Darstellung der Werte der Poissonschen Funktion für alle Werte von m zwischen 1 und 16 und für alle Wahrscheinlichkeiten größer als 10^{-3}. Die Poissonsche Funktion ist oft nützlich, um zu prüfen, ob eine Meßreihe rein statistisch oder durch Störungen entstellt ist. Dazu kann auch die Betrachtung des mittleren Fehlers von Teilreihen dienen. Der mittlere Fehler einer gemessenen Zahl m ist gleich $\sqrt{m}$. Bei registrierten Zählungen kann man, wie

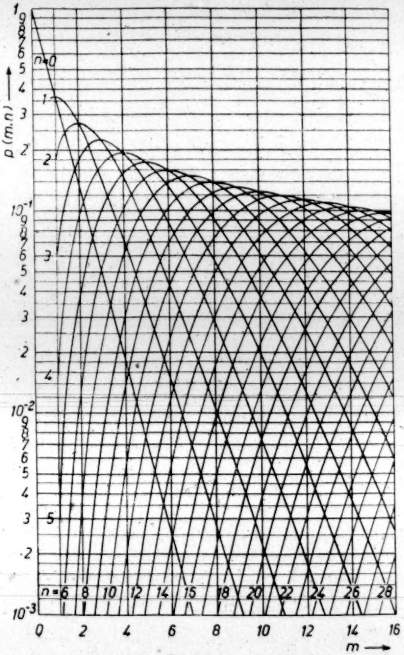

Fig. 9. Die Poissonsche Funktion.
m = erwartete, n = beobachtete Zahl der Ereignisse.

Bothe (1936 b) gezeigt hat, eine einfache Prüfung anstellen, indem man auszählt, wieviel Ausschläge scheinbar Paare bilden, d. h. näher beieinander liegen als der vorige und der nächste Ausschlag entfernt ist. Im Mittel müssen $^1/_3$ aller Ausschläge mit dem nächsten ein solches Paar bilden. Ähnlich kann man die Häufigkeit von Gruppen mehrerer Ausschläge untersuchen.

2. Messungen mit Nulleffekt: erforderliche Meßzeit

Meist wird außer dem gesuchten Effekt, der im Mittel z Ausschläge in der Zeiteinheit liefern möge, noch ein Nulleffekt z_0 mitgemessen, der

gewöhnlich durch eine gesonderte Messung bestimmt wird. Ist während der Zeit t der Effekt (mit Nulleffekt) und während der Zeit t_0 der Nulleffekt allein gemessen worden, so ist der relative mittlere Fehler des Ergebnisses:

$$\varrho = \frac{\Delta z}{z} = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{(z+z_0)\,t}{t^2} + \frac{z_0 t_0}{t_0^2}}, \qquad (2)$$

daraus folgt für die Meßzeit, die notwendig ist, um den relativen Fehler ϱ zu unterschreiten:

$$t = \frac{1}{\varrho^2 z}\left(1 + \frac{z_0}{z}\right)\left(1 + \frac{t}{t_0}\right). \qquad (3)$$

Hiernach kann man die für eine Messung notwendige Zeit vorher etwa abschätzen. Für das Verhältnis t/t_0 der Meßzeiten für Effekt und Nulleffekt wählt man zweckmäßig ungefähr

$$t/t_0 = \sqrt{\frac{z+z_0}{z_0}}. \qquad (4)$$

Bei diesem Verhältnis wird nämlich der Fehler für eine gegebene Gesamtmeßzeit $t+t_0$ ein Minimum, wie man leicht nachrechnet.

3. Zählverluste bei großen Stoßhäufigkeiten

Bei großen Stoßzahlen, wie sie gerade bei Koinzidenzmessungen häufig vorkommen, wird es oft eintreten, daß zwei oder mehr Ereignisse so rasch aufeinanderfolgen, daß in der Zählanordnung (Zählrohr, Verstärker und Zählwerk) nur das erste nachgewiesen werden kann. Die gemessenen Stoßzahlen bedürfen daher einer Korrektur. Ihre Bestimmung ist an sich ein kompliziertes Problem[1]). Wir machen zunächst die einfachsten Annahmen: Die Anordnung besitze ein gewisses Auflösungsvermögen für Einzelzählung, gekennzeichnet durch die Zeitdauer τ eines Stoßes. Ein Ereignis, das innerhalb der Zeit τ hinter einem gezählten folgt, soll also nicht gezählt werden. Mit dieser Annahme kann man eine Formel berechnen, die die Zählverluste bei kleinen Stoßzahlen richtig wiedergibt. Wenn es jedoch häufiger vorkommt, daß auf zwei solcher benachbarter Ereignisse noch weitere in kurzem Abstand folgen, muß man über die Wirkung des zweiten Stoßes Genaueres aussagen. Das ist im allgemeinen schwierig, es gibt jedoch zwei Grenzfälle:

Fall I: Ein Ereignis, das innerhalb τ auf ein gezähltes folgt, hat keine Wirkung auf die Zählanordnung, diese ist während der Zeit τ unempfindlich; nachher auftretende Stöße werden wieder gezählt. Nehmen wir an, bei einer Messung treten im Mittel N Ereignisse in der Zeiteinheit auf. Sind nun in dieser Zeit N' Stöße gezählt worden, so war das Zählrohr für die Zeitdauer $N'\tau$ unempfindlich. Es konnten also nur $N(1-N'\tau)$ Ereignisse gezählt werden; daraus folgt:

$$N' = \frac{N}{1+N\tau}. \qquad (5)$$

Für sehr große N nähert sich die gemessene Ausschlagszahl dem Grenzwert $1/\tau$[6]).

Fall II: Ein Ereignis, das in der Zeitspanne $\Delta t < \tau$ hinter einem gezählten erscheint, überlagert seinen Ausschlag dem ersten, verlängert ihn also um Δt, ohne daß es selbst gezählt wird. Dann wird ebenso ein drittes, das innerhalb τ nach dem zweiten kommt, ausgelassen, und so fort: Nur Ereignisse, die mehr als τ vom vorigen Abstand haben, werden gezählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür gibt das Poissonsche Gesetz. Wenn in der Zeiteinheit N Ereignisse auftreten, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß in der Zeit τ kein Ereignis auftritt, daß also das nächste gezählt wird, gegeben durch

$$p = p(N\tau, 0) = e^{-N\tau}.$$

Die gemessene Ausschlagszahl N' wird damit

$$N' = Ne^{-N\tau}. \qquad (6)$$

In diesem Fall ergibt sich ein Maximum bei $N = 1/\tau$; dabei wird $N' = \frac{1}{e\tau}$. Bei größeren Ausschlagszahlen wird N kleiner, weil es immer seltener wird, daß zwischen zwei Ereignissen mehr

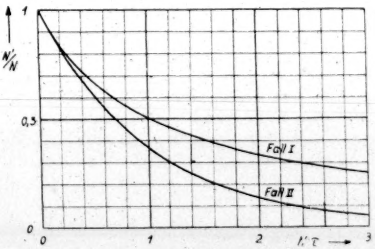

Fig. 10. Zusammenhang zwischen wirklicher und gemessener Stoßzahl.

als der Abstand τ ist[7]). Fig. 10 gibt die Beziehung zwischen gemessenen und wirklichen Ausschlagszahlen für die beiden Fälle wieder. Fall I ist in sehr guter Näherung erfüllt bei der

5) Siehe Volz 1935, Skinner 1935, Ruark und Brammer 1937, Alaoglu und Smith 1938, Lifschutz und Duffendack 1938, wo das Problem zum Teil eingehender behandelt ist.

6) Dieser Fall ist schon von Bothe (Handbuch der Physik XXII, S. 201, 1926) in einem etwas anderen Zusammenhang betrachtet worden.

7) Die Formel für Fall II ist etwa gleichzeitig von Schopper 1935 und von Volz angegeben worden.

Multivibratorschaltung von Getting (Fig. 3e). Für die Dauer einer Schwingung ist nach jedem Ausschlag das Zählrohr und der Verstärker völlig unempfindlich. Dann setzt die Empfindlichkeit plötzlich wieder ein. Allerdings muß man dafür sorgen, daß in der Anordnung keine längere Zeitkonstante vorkommt, vor allem nicht bei dem mechanischen Zählwerk. Für den Fall, daß das Zählwerk eine größere Zeitkonstante hat, haben Ruark und Brammer 1937 eine Formel angegeben.

Fall II ist immer nur angenähert erfüllt, z. B. bei einem mechanischen Zählwerk, bei dem durch rasche Aufeinanderfolge der Stöße der Anker gehindert wird, in die Ruhestellung zurückzukehren; oder bei einem Zählrohr mit hohem Ableitwiderstand, bei dem durch zu viele Entladungen die Spannung bis fast an die Einsatzspannung sinkt, so daß die Stöße zu klein werden, um den Verstärker noch zum Ansprechen zu bringen.

Meist läßt sich das Verhalten der Anordnung weder nach Fall I noch nach Fall II genau beschreiben. Immer aber läßt sich für nicht zu große Ausschlagszahlen die Korrektion durch Bestimmung einer Auflösungszeit finden. Bei größeren Ausschlagszahlen liegt dann der Verlauf zwischen dem der Fälle I und II. Für den Fall der Neher-Harper-Schaltung haben Lifschutz und Duffendack eine genauere Diskussion gegeben. Experimentell läßt sich die Auflösungszeit und der ganze Verlauf mit der Abfallskurve einer radioaktiven Quelle von genau bekannter Halbwertzeit sehr einfach bestimmen (siehe z. B. Flammersfeld 1938). Ebenso kann man mit zwei etwa gleichen γ-Strahlpräparaten arbeiten, die man teils einzeln, teils zusammen in bestimmten Abständen mißt.

$$Q = 1 - \sum_{n=q}^{\infty} p(m,n) = 1 - \frac{mq}{q!} e^{-m} \left(1 + \frac{m}{q+1} + \frac{m}{q+1}\frac{m}{q+2} + \cdots\right)$$

oder

$$Q = 1 - \frac{1}{(q-1)!} \int_0^m m^{q-1} e^{-m} dm \,. \qquad (8)$$

In Tabelle 1 sind die numerischen Werte von N'/N für verschiedene Untersetzungsverhältnisse und für verschiedenes $N\tau$ (Zahl der Ereignisse in der Auflösungszeit des Zählwerks) ausgerechnet. Danach können z. B. bei einer Auflösungszeit des Zählwerks von $^1/_{50}$ sec mit weniger als 2 Proz. Verlust im Zählwerk gezählt werden: Ohne Untersetzer 60 Ausschläge/min; bei Untersetzung 1 : 2 600/min; bei 1 : 4 3000/min; bei 1 : 8 10000/min.

Meist ist die Auflösungszeit des Zählwerks wesentlich länger als die der übrigen Anordnung. Deshalb hat man die Stoßzahluntersetzer eingeführt, um die Zahl der dem Zählwerk zugeführten Ausschläge zu verringern. Bei Verwendung eines Untersetzers, z. B. 1 : 8, erreicht nur jeder achte Ausschlag das Zählwerk. Diese Ausschläge sind nicht mehr statistisch verteilt, ihre Abstände sind gleichmäßiger.

Wir werden nun unsere Betrachtung auf diese Anordnung erweitern; wir beschränken uns auf den Fall II, d. h. jeder Stoß, der in dem Intervall τ (dem Auflösungsvermögen des Zählwerks) nach dem vorigen auf das Zählwerk trifft, möge ausfallen. Der Unterschied gegen Fall I ist hier weniger wesentlich als bei der Zählung aller Stöße. Ferner nehmen wir vorläufig an, daß die Auflösungszeit der ganzen übrigen Anordnung sehr klein sei, daß also rein statistisch verteilte Stöße auf den Untersetzer treffen und dort alle wirksam werden. Der Untersetzer führe jeden q-ten Stoß dem Zählwerk zu. Die Wahrscheinlichkeit, daß im Intervall τ keine neue Stoßserie mehr anfängt (also nicht mehr als $q-1$ Stöße stattfinden), sei $Q(q, N\tau)$, wo N die Zahl der Ereignisse in der Zeiteinheit ist. Dann wird wieder wie oben bei Fall II:

$$N' = QN.$$

Nun die Berechnung von Q: Im Poissonschen Gesetz (1), wobei hier $m = N\tau$ zu setzen ist, ist p die Wahrscheinlichkeit, daß im Zeitintervall τ im Einzelfall gerade n Stöße erfolgen. Kommen nun q oder mehr Stöße vor, so geht die nächste Stoßserie für die Messung verloren. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$\sum_{n=q}^{\infty} p(m,n) \,,$$

also wird

Tabelle 1

Wahrscheinlichkeit Q, daß ein Stoß im Zählwerk gezählt wird, wenn m Stöße in der Trennzeit des Zählwerks auftreten

	$m =$	$^1/_8$	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	1
1 : 1		0,885	0,777	0,607	0,472	0,367
	$m =$	$^1/_4$	$^1/_2$	1	1,5	2
1 : 2		0,974	0,910	0,737	0,558	0,412
	$m =$	$^1/_2$	1	2	3	4
1 : 4		0,9982	0,9814	0,856	0,648	0,437
	$m =$	1	2	4	6	8
1 : 8		$1 - 10^{-5}$	$1 - 10^{-3}$	0,949	0,743	0,450

Bisher hatten wir angenommen, daß das Zählwerk der einzige träge Teil der Anordnung

sei. Wenn τ_v die Auflösungszeit vor dem Untersetzer ist (der Untersetzer selbst soll eine kleinere Auflösungszeit als τ_v haben), so sind die Stöße, die der Untersetzer erhält, nicht mehr rein statistisch verteilt, sondern die Abstände $< \tau_v$ sind herausgeschnitten. Also werden gerade bei den schnellen Stoßserien, die ein Versagen des Zählwerks verursachen, häufig Stöße ausfallen. Dadurch werden diese Serien verlängert, die Wirksamkeit des Zählwerks wird verbessert. Alaoglu und Smith 1938 haben dieses Problem durchgerechnet und quantitative Formeln angegeben, auf die hier verwiesen werden muß. Wenn τ nicht größer ist als $q\tau_v$, kann das Zählwerk überhaupt keine Stoßserie mehr auslassen, seine Empfindlichkeit ist 100 Proz., die Verluste berechnen sich allein aus der Auflösungszeit der übrigen Anordnung.

4. Theorie der Koinzidenzmessungen

Wir betrachten zwei Zählsysteme, deren jedes aus einem oder auch aus mehreren parallelgeschalteten Zählrohren bestehen kann. Darin mögen N_1 bzw. N_2 Ausschläge pro Minute gezählt werden. Wenn keine gleichzeitigen Ereignisse gezählt werden, so werden doch zufällig Ausschläge der beiden Systeme innerhalb einer Zeit T zusammenfallen, die so kurz ist, daß im Verstärker eine Koinzidenz gezählt wird. T ist die Auflösungszeit der Anordnung für Koinzidenzen, und die Zahl der zufälligen Koinzidenzausschläge ist

$$K_{zuf} = 2\,T N_1 N_2 \qquad (9)$$

(entweder alles bezogen auf Minuten, oder K/Stunde, T in sec, und N_1 und N_2/min).

Es mögen nun in der Minute U-Paare gleichzeitiger Ereignisse stattfinden, deren einer Partner im Zählsystem I, der andere im System II nachgewiesen werden kann. Dadurch entstehen M_1 bzw. M_2 Ausschläge/min. Es ist

$$M_1 = p_1 U$$
$$M_2 = p_1 U\,,$$

p_1 und p_2 sind die Nachweiswahrscheinlichkeiten der Systeme für die beiden Ereignisse. Dann entstehen offenbar

$$K_w = p_1 p_2 U$$

wahre Koinzidenzen in der Minute (10). Man bezieht meist die Koinzidenzen auf die gezählten Einzelausschläge. Es wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{K_w}{M_1} &= p_2 \\ \frac{K_w}{M_2} &= p_1\,. \end{aligned}\right\} \qquad (10a)$$

Man braucht also U nicht zu kennen und erhält unmittelbar p_2 bzw. p_1. Man kann auch umgekehrt bei bekanntem p_1 oder p_2 M_2 oder M_1 finden oder U z. B. mit p_1 und M_1 oder mit p_1 und p_2. Für alle diese Fälle werden wir später Beispiele finden.

Bei großer Häufigkeit der gesamten Einzelausschläge N_1 oder N_2 ist zu beachten: Die zufälligen Koinzidenzen sowohl als die wahren beziehen sich auf die Ausschlagszahlen, die an der Koinzidenzröhre auftreten. Beim Vergleich von Häufigkeiten der Koinzidenzen und der Einzelausschläge kommt es also darauf an, ob die Zählverluste der Einzelzählung vor oder hinter der Koinzidenzstufe entstehen.

Eine Methode, das Auflösungsvermögen einer Zählrohranordnung unabhängig von dem des Zählwerks zu bestimmen, besteht darin, daß man systematische Koinzidenzen z. B. der Ultrastrahlung mißt und dann die Einzelausschlagszahl eines Zählrohres erhöht, bis die Zahl der systematischen Koinzidenzen abnimmt. Der Bruchteil der verlorengehenden Koinzidenzen ist gleich dem relativen Verlust an Einzelausschlägen (z. B. Street und Woodward 1934, Weber 1940).

5. Wahrscheinlichkeit des Nachweises verschiedener Strahlenarten

Die Nachweiswahrscheinlichkeit p eines Zählrohrs für eine bestimmte Strahlenart hängt ab

1. vom Raumwinkel ω;
2. von der Absorption der Strahlen auf dem Weg von ihrer Entstehung bis zum Zählrohr. (Es möge der Bruchteil A absorbiert werden.)
3. Von der Empfindlichkeit p_0 des Zählrohrs für Strahlen, die in sein Inneres gelangen.

Man kann also ansetzen:

$$p = \frac{\omega}{4\pi}(1 - A)\,p_0 k\,. \qquad (11)$$

Dabei ist die Einführung eines geometrischen Faktors k nötig, weil an sich p_0 nicht eindeutig definiert ist; es kommt nämlich auch darauf an, wo und unter welchem Winkel das Zählrohr durchsetzt wird. Daher muß p_0 für eine bestimmte Anordnung definiert werden (z. B. weit entfernte Quelle in der Richtung quer zur Zählrohrachse). Für andere Abstände und Winkel gilt dann der zusätzliche Faktor k, der in günstigen Fällen nahe gleich Eins ist.

a) Nachweis von β-Strahlen.

α) Raumwinkel. Eine β-Strahlenquelle stehe im Abstand a gegenüber der Mitte eines Zähl-

rohrs vom Durchmesser $2R$ und der wirksamen Länge 1. Dann erreicht der Bruchteil $\frac{\omega}{4\pi}$ der β-Strahlen das Zählrohr, wo $\frac{\omega}{2\pi}$ in Fig. 11 abgelesen werden kann. Die Werte der Figur wurden nach Näherungsformeln von Norling berechnet.

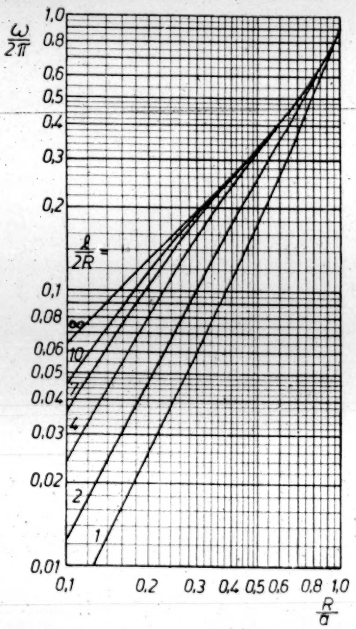

Fig. 11. Raumwinkel eines Zählrohres (Länge l, Durchmesser $2R$), betrachtet aus dem Abstand a quer zur Zählrohrachse.

Für ein Fensterzählrohr (Fenster von Breite b, Länge c, Abstand der Quelle von der Fenstermitte a) gilt

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{b/2 \cdot c/2}{a\sqrt{a^2 + b^2/4 + c^2/4}}. \qquad (12)$$

β) Absorption. Die Wand des Zählrohrs oder das Fenster bewirkt, daß nicht alle auf das Zählrohr treffenden Strahlen ins Zählrohrinnere gelangen; der Rest wird abgelenkt oder gebremst. Die Absorption hängt in komplizierter Weise von der Schichtdicke und vom Auftreffwinkel der β-Strahlen ab; sie läßt sich daher nicht genau angeben. Zur Annäherung führt man am besten einen Absorptionskoeffizienten μ ein, etwa $\mu = 1/R$, wo R die praktische Reichweite der β-Strahlen ist (siehe Bothe, Handbuch der Physik XXII/2, 1933). Mit kleinerem Abstand der Quelle vom Zählrohr wird die Absorption immer stärker, weil mehr und mehr kleine Auftreffwinkel bevorzugt werden. Daher wird die Intensität als Funktion des Abstands nicht allein dem Raumwinkel proportional sein, sondern mit sinkender Entfernung weniger stark ansteigen, gemäß dem oben eingeführten Faktor k.

γ) β-Empfindlichkeit eines Zählers. Das Problem, ob ein Zählrohr im Auslösebereich fähig ist, jeden durchgehenden β-Strahl zu zählen, ist schon in den ersten Arbeiten von Geiger und Müller bearbeitet worden, und wurde später besonders im Zusammenhang von Ultrastrahlungsmessungen untersucht.

Die β-Empfindlichkeit eines Zählers läßt sich sehr genau mit Hilfe von Dreifachkoinzidenzen untersuchen. Wenn drei Zählrohre übereinander in einer Linie stehen, so entstehen Dreifachkoinzidenzen, abgesehen von seltenen Schauern, nur durch einzelne Strahlen, die in gerader Linie alle drei Zähler durchsetzt haben. Wenn nun das mittlere Zählrohr mindestens ebenso groß ist wie die beiden anderen, dann ist die Zahl der durch alle Zähler durchgehenden Strahlen nur durch die beiden äußeren bestimmt. Mißt man also erst Zweifachkoinzidenzen mit den beiden äußeren Zählrohren und dann Dreifachkoinzidenzen mit allen dreien, so müssen sich dieselben Zahlen ergeben, wenn jeder durchgehende Strahl im mittleren Zählrohr gezählt wird. Andernfalls ist das Verhältnis Dreifach- zu Zweifachkoinzidenzen gleich der Ansprechwahrscheinlichkeit des mittleren Zählrohrs. Durch Verschieben dieses Zählrohrs kann man die Empfindlichkeit verschiedener Bereiche abtasten. Die Methode stammt von Rossi 1931; für eine neuere Messung siehe z. B. Street und Woodward 1934.

Es hat sich nun gezeigt, daß ein Zählrohr in seinem ganzen Innenraum empfindlich ist bis auf einen Bereich an den Enden, dessen Größe mit wachsender Zählspannung abnimmt. Im übrigen wird mit guten Zählrohren jeder β-Strahl gezählt, der im Gasraum des Zählers ein Ionenpaar erzeugt. Dies wird eindrucksvoll bewiesen durch Versuche von Danforth und Ramsey 1936, die umgekehrt aus der Empfindlichkeit dieses Zählrohrs bei verschiedenen Drucken auf die Wahrscheinlichkeit der primären Ionisierung der Ultrastrahlung geschlossen haben. Sie erhielten dabei die richtigen Werte. Man braucht nur die im Gasraum primär gebildeten Elektronen zu berücksichtigen, die aus den Wänden aus-

tretenden sind im allgemeinen zu vernachlässigen[8]).

Die β-Empfindlichkeit eines Zählrohrs läßt sich danach berechnen. Es kommt dabei im wesentlichen auf das Produkt der je cm Weg eines β-Strahls im Zählrohr gebildeten primären Ionen mit dem Durchmesser des Zählrohrs an. Außerdem spielt noch die Art des Durchgangs der β-Strahlen eine Rolle.

Wir betrachten ein langes Zählrohr vom Durchmesser d. Von einem Punkt seiner Innenwand mögen β-Strahlen nach allen Richtungen gleichmäßig und geradlinig ausgehen. Dann läßt sich die Längsverteilung $N_1(l)$ berechnen. Es ist

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } l < d \quad N_1 dl = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}\,dl \\ &\text{für } l \geq d \quad N_1 dl = \frac{2}{\pi}\frac{l}{d}\,dl\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Für den Fall, daß die Elektronen von einem Punkt aus großer Entfernung quer zum Zählrohr geradlinig dieses durchsetzen, wird

$$N_2 dl = \frac{l}{\sqrt{d^2 - l^2}}\frac{dl}{d}. \quad (14)$$

Es sei nun $1/\lambda$ die Zahl der primären Ionen, die im Mittel je cm Bahn im Zählrohr gebildet werden. Dann ist nach dem Poissonschen Gesetz [Gleichung (1)] die Wahrscheinlichkeit, daß auf der Strecke l kein Ion gebildet wird:

$$p(l/\lambda, 0) = e^{-l/\lambda}.$$

Also wird die mittlere Nachweiswahrscheinlichkeit bei einer Längenverteilung $N(l)$

$$p_{0,1} = \int_0^\infty (1 - e^{-l/\lambda}) N dl, \text{ wenn } \int_0^\infty N(l)\,dl = 1 \text{ ist.} \quad (15)$$

In Fig. 12 sind die β-Empfindlichkeiten für die beiden oben behandelten Fälle aufgezeichnet. Die Kurven weichen nicht viel voneinander ab. Die praktisch vorkommenden Fälle werden meist zwischen den beiden Kurven liegen. Dabei entspricht der lineare Abfall am Anfang der ersten Kurve einer starken Bevorzugung flachen Austritts der Elektronen, also kleiner Bahnlängen während bei Benachteiligung kleiner Längen die zweite Kurve sich nur quadratisch von Eins entfernt.

Fig. 12 zeigt, daß man bei kleinen Zählrohren durchaus darauf achten muß, daß die Empfindlichkeit nicht wesentlich unter Eins sinkt. Die Zahl der von einem β-Strahl bei 1 eMV Energie primär gebildeten Ionen ist nach den Messungen von Williams und Terroux bei Normalbedingungen in Luft 24 und in Wasserstoff 6 Ionenpaare/cm. Danach tritt z. B. bei einem

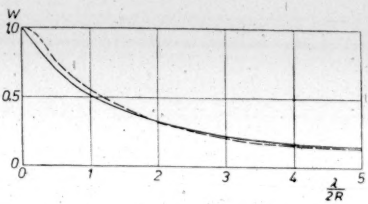

Fig. 12. β-Empfindlichkeit eines Zählrohres vom Durchmesser d, wenn in seinem Inneren $^1/_\lambda$ primäre Ionenpaare/cm gebildet werden.
——— Die β-Strahlen laufen regellos in allen Richtungen. - - - - Die Strahlen kommen geradlinig aus großer Entfernung von einem Punkt quer zur Zählrohrachse.

mit Luft von $^1/_{10}$ at gefüllten Zählrohr von 1 cm Durchmesser ein Verlust von etwa 20—30 Proz. auf. Wenn das Zählrohr dazu noch kurz und der unempfindliche Bereich an den Enden relativ groß ist, so muß mit noch größeren Verlusten gerechnet werden.

b) Nachweis von γ-Strahlen.

γ-Strahlen werden im Zählrohr nicht direkt nachgewiesen, sondern mit Hilfe der β-Strahlen, die sie in der Zählrohrwand auslösen. Die Empfindlichkeit eines γ-Zählers ist daher von der Größenordnung $\mu_\gamma : \mu_\varepsilon$, wo μ_γ bzw. μ_ε die Absorptionskoeffizienten des Wandmaterials für γ-Strahlen bzw. Elektronen sind. v. Baeyer 1935 leitet daraus ab, daß im Bereich um 1 eMV die Empfindlichkeit mit $E^{-0.75}$ zunehmen soll. Die Zählrohrwand soll für γ-Messungen dick genug sein, um alle Elektronen auszunützen, die in den Zähler gelangen können. Andererseits soll sie nicht zu dick sein, weil sonst die γ-Strahlen nutzlos absorbiert werden.

Das Problem des γ-Nachweises läßt sich näherungsweise rechnerisch behandeln. Dabei stellt sich der Vorgang folgendermaßen dar: Die im Abstand a von der Zählrohrachse entstehenden γ-Strahlen durchsetzen zum Teil die Zählrohrwände. Durch Absorption entstehen in diesen Elektronen, und zwar:

1. Rückstoßelektronen durch den Comptoneffekt;
2. Photoelektronen durch den Photoeffekt;
3. Paare von positiven und negativen Elektronen durch Materialisation der γ-Strahlen über 1 eMV.

8) Allerdings sind nicht alle Zählrohre so empfindlich, wie z. B. eine Arbeit von Milatz und ten Kate 1940 zeigt, die die β-Empfindlichkeit eingehend untersucht haben (siehe auch de Vries und Sizoo 1939).

Die Wirkungsquerschnitte der drei Prozesse sind bekannt[9]); ebenso die Energie der Photoelektronen und die Energieverteilung der Rückstoßelektronen. Über die Verteilung der Energie bei Elektronenpaaren weiß man nur wenig[10]), doch entsteht dadurch keine große Unsicherheit.

Die entstandenen Elektronen haben nun eine gewisse Wahrscheinlichkeit, ins Zählrohrinnere zu gelangen. Man kann diese Wahrscheinlichkeit ersetzen durch Einführung einer effektiven Dicke der Zählrohrwand, aus der dann alle Elektronen ins Zählrohrinnere gelangen können. Diese Dicke hängt jedoch noch von der Winkelverteilung der Elektronen ab. Die genaue Berücksichtigung der Winkelverteilung ist nun nicht durchführbar, mathematisch wegen der Kompliziertheit der entstehenden Gleichungen und physikalisch wegen des verwickelten Einflusses der Vielfachstreuung der Elektronen. Näherungsweise haben Yukawa und Sakata 1937 unter anderen Vereinfachungen die Winkelverteilung berücksichtigt. Norling 1941 behandelt zwei Grenzfälle eingehend. Im ersten nimmt er an, daß die Winkelverteilung der Elektronen keine Rolle spielt, sondern daß man so rechnen kann, als ob nach allen Richtungen gleichviele austreten. Im zweiten Grenzfall behandelt er eine extrem ungleichmäßige Richtungsverteilung: alle Elektronen sollen genau in Richtung der erzeugenden γ-Strahlung in den Zähler eintreten. Im zweiten Fall wird die Nachweiswahrscheinlichkeit genau proportional dem Raumwinkel, im ersten dagegen wächst sie mit

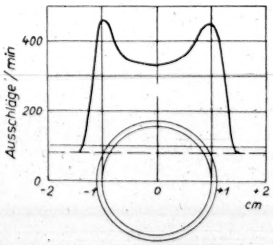

Fig. 13. Ausschlagszahl eines γ-Zählrohres bei Verschieben eines ausgeblendeten γ-Strahls quer zur Zählrohrachse.

abnehmender Entfernung des Präparats vom Zählrohr stärker an als der Raumwinkel, weil bei schiefem Durchtritt der γ-Strahlen durch die Wand mehr Absorptionsakte in der Nähe des Zählrohrinnern stattfinden. Dieser Effekt zeigt sich deutlich bei Messungen von Jorgensen, der einen Zähler mit einem dünnen γ-Strahl abtastet; dabei ist die Empfindlichkeit in der Mitte am kleinsten, am Rand hat sie ein Maximum (Fig. 13).

Für den Fall der gleichmäßigen Winkelverteilung ist die effektive Schichtdicke d_{eff} einfach definiert. In einer unendlich dicken Schicht mögen N-Elektronen/cm³ in der Zeiteinheit entstehen. Aus der Oberfläche treten n-Elektronen/cm² aus; dann ist

$$n = d_{\text{eff}} N . \tag{16}$$

Annähernd kann man ansetzen:

$$d_{\text{eff}} = k \overline{R} ,$$

wo R die mittlere praktische Reichweite des Elektronengemischs und k eine Konstante, etwa gleich $^1/_4$ ist. Bethe u. a. 1938 haben in einer Arbeit, die weiter unten noch besprochen werden soll, ein Schema für die Behandlung des Durchgangs von Elektronen durch Materie angegeben, das auch die Berechnung der effektiven Schichtdicke bei gegebener Anfangsenergie gestattet; numerische Berechnungen sind in Aussicht gestellt. Für experimentelle Daten werden oft die Messungen von Kovarik benutzt.

Die Schwächung der γ-Strahlen durch Absorption wird bei der theoretischen Rechnung meist vernachlässigt. Sie spielt (nach Norling) bei γ-Energien unter 1 eMV bei hochatomigem Wandmaterial eine Rolle.

Die theoretischen Berechnungen werden meist nur verwendet, um Messungen der Empfindlichkeit zu ergänzen. Dabei wird der Ansatz gemacht:

$$p = \frac{\omega}{4\pi} p_0(E_\gamma) , \tag{17}$$

wobei p_0 meist in größerem Abstand vom Zählrohr bestimmt wird. Zur Eichung dient gewöhnlich die Strahlung von ThC'', die schon nach Filterung mit 1 cm Blei praktisch homogen ist. Von v. Droste stammt folgende Näherungsformel:

$$p_0 = 2\,k(R_1 t + 2\,R_2 \tau + \beta R_3 \sigma)$$

(τ, τ_p, σ = Absorptionskoeffizienten für Photoeffekt, Paarbildung und Streuung, R_1, R_2, R_3 = Reichweiten der entstehenden β-Strahlgruppen). Die beiden verfügbaren Konstanten k und β bestimmte er so, daß die experimentell bestimmte Empfindlichkeit bei 2,65 und 0,24 eMV richtig wiedergegeben wurde ($k = 0{,}4$; $\beta = 0{,}6$). Die so für Messingzählrohre gefundene Kurve wurde später von Dunworth und von Norling 1940 im Bereich von 0,5 bis 3 eMV bestätigt. Norling hat Empfindlichkeitsmessungen für Messing,

9) Siehe dazu Gentner 1937.
10) Siehe z. B. Klarmann und Bothe 1936.

Blei und Aluminium ausgeführt. Zur Ergänzung verwandte er für Messing die Kurve von v. Droste, für Aluminium die eingehenden Berechnungen von Yukawa und Sakata. Fig. 14 zeigt die Empfindlichkeit für Zählrohre aus den drei Metallen nach Norling.

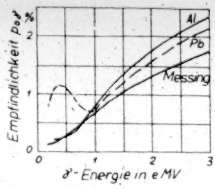

Fig. 14. γ-Empfindlichkeit für Zählrohre aus Aluminium, Messing und Blei nach Norling.

Die Gültigkeit der Gleichung (17) ist, was die Abhängigkeit vom Abstand der Quelle betrifft, von Norling mit Hilfe eines Radiumpräparats geprüft worden, das in verschiedenen Abständen vor dem Zählrohr stand. Es ergab sich dabei, daß die Zahl der Ausschläge wenig stärker zunahm als der Raumwinkel. Allerdings ist die Radiumstrahlung sehr inhomogen und enthält weiche Komponenten, so daß sicher bei kleinen Abständen die Ergebnisse durch Absorption erniedrigt sind. Man kann daher nach dieser Messung nicht sagen, welcher der beiden oben behandelten Grenzfälle den tatsächlichen Verhältnissen besser entspricht. Theoretisch kann auch die Abhängigkeit der Empfindlichkeit von der Energie bei kleinen Abständen anders sein als bei großen. Es ist jedenfalls gut, sich bei allen Messungen auf eine Standardanordnung zu stützen, wie das vor allem Feather und Dunworth 1938 betont haben.

c) Nachweis von α-Strahlen und Protonen.

Zum Nachweis von α-Strahlen und Protonen wird das Zählrohr meist als Proportionalzähler benutzt. Denn erstens ist dann der Nulleffekt sehr klein, zweitens kann man auch neben großen β-Strahlintensitäten messen und drittens entfallen bei Koinzidenzmessungen alle störenden Ultrastrahl- oder β-Koinzidenzen.

Das Präparat steht entweder vor dem Fenster des Zählrohrs oder es ist im Innern des als Röhrchen ausgebildeten Zähldrahts untergebracht. Der Bruchteil der ins Zählrohrinnere gelangenden Strahlen ist durch die Absorption der schräg durch das Fenster oder das Röhrchen gehenden Strahlen bedingt [bei kleinen Fenstern oder größerem Abstand des Präparats durch den Raumwinkel, siehe Gleichung (12)]. Der Bruchteil der durchgelassenen Strahlen ist beim großen Fenster für eine isotrope Strahlenquelle:

$$1 - A = 1 - \frac{d}{R}$$

(R = Reichweite der Strahlen im Material des Fensters, d = Dicke des Fensters); beim Röhrchen (Präparat in der Achse):

$$1 - A = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{R}\right)^2}.$$

Die in den Zähler eintretenden Strahlen können stets quantitativ gezählt werden, wenn der Verstärker genügend empfindlich ist, um auch auf die kleinsten Stromstöße anzusprechen. Das ist bei α-Strahlen meist leicht zu erreichen. Mit wachsender Zählspannung nimmt die Zahl der Ausschläge zunächst zu, bis auch die kleinsten α-Ausschläge gezählt werden. Darauf folgt ein Bereich, in dem die Ausschlagzahl vollkommen konstant ist. Schließlich wird die Spannungsverstärkung so groß, daß auch die Ausschläge einzelner Elektronen, die im Zähler viel Energie verlieren, mitgezählt werden. Es handelt sich hierbei vor allem um β-Strahlen, die im Zähler zur Ruhe kommen. Ein Elektron der Energie E_β (in ekV) hat eine Reichweite[11])

$$R_\beta = \left(\frac{E_\beta}{23{,}6}\right)^2 \qquad (18)$$

in Luft bei Normalbedingungen (R_β in cm). In einem Zähler von 1 cm Durchmesser, der mit $^1/_{10}$ at Luft gefüllt ist, ist also die Reichweite eines β-Strahls von 7,5 kV gleich dem Zählrohrdurchmesser. Ein das Zählrohr auf einem Durchmesser durchsetzender α-Strahl erleidet dabei einen Energieverlust von 95 ekV. Die α-Ausschläge sind also viel größer als die β-Ausschläge.

Das wird anders beim Nachweis von Protonen. Ein Proton von 30 cm Reichweite (4,6eMV) verliert in dem obigen Fall nur 16 ekV, eines von 100 cm Reichweite (9,2 eMV) nur 10 ekV. Bei schnellen Protonen und kleinen Zählrohren sind also die Ausschläge von Elektronen und Protonen nicht mehr deutlich getrennt, die Zählcharakteristik hat keinen horizontalen Teil. Man wird versuchen, die Protonenausschläge durch Vergrößerung des Zählrohrdurchmessers zu vergrößern, oder den Fülldruck zu erhöhen. Bei einem Zählrohr von 5 cm Durchmesser und Füllung mit Luft von Atmosphärendruck werden die obigen Zahlen: 53 ekV für die β-Energie, 500 ekV für den Energieverlust eines Protons von 100 cm Reichweite. Hier wird also wieder eine deutliche Trennung von Protonen und β-Strahlen erreicht.

11) Siehe Bothe, Handbuch der Physik XXII/2. 1933.

d) Nachweis von Neutronen.

Schnelle Neutronen werden am empfindlichsten nachgewiesen durch Messung der Rückstoßprotonen z. B. aus Paraffin. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Nachweises läßt sich heute ungefähr abschätzen. Wir betrachten einen einfachen Fall: auf einer dicken Paraffinschicht mögen N Neutronen senkrecht auftreffen. Die auf der andern Seite austretenden P Protonen werden gezählt. Die Kohlenstoffrückstoßkerne sollen wegen ihrer kleinen Reichweite vernachlässigt werden. Die Empfindlichkeit wird

$$p_{on} = \frac{P}{N}.$$

Die Winkelverteilung bei der Streuung ist symmetrisch im System des bewegten Schwerpunktes. Daraus folgt für die Richtungsverteilung der Rückstoßprotonen (wie übrigens auch für die von Rückstoßkernen anderer Masse):

$$n(\vartheta)\,d\vartheta = \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta$$

(ϑ = Winkel zur Richtung der Neutronen). Wenn E die Energie der Neutronen ist, wird ferner die Energie der Rückstoßprotonen U:

$$U = E\cos^2\vartheta$$

und die Reichweite R in g/cm² Paraffin:

$$R = R(U) = R(E\cos^2\vartheta).$$

Die Schicht, aus der alle Protonen nachgewiesen werden, die unter dem Winkel ϑ austreten, hat eine Dicke:

$$\delta(\vartheta) = R(E\cos^2\vartheta)\cos\vartheta$$

Schließlich sei der Absorptionskoeffizient des Paraffins für Neutronen $\nu(E)$ in $g^{-1}\,cm^2$.
Dann wird die Nachweiswahrscheinlichkeit:

$$p_{on} = \nu(E)\,\bar{\delta}(E) = \nu(E)\,\frac{2\pi\int_0^{\pi/2}\delta(\vartheta)\,n(\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta}{2\pi\int_0^{\pi/2} n(\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta}.$$

Die Reichweite ist annähernd

$$R = C\,U^{1,7} = C\,E^{1,7}\cos^{3,4}\vartheta,$$

wo C für Paraffin gleich $2{,}75\cdot 10^{-3}$ g/cm² und E in eMV zu rechnen ist.

Damit wird:

$$\bar{\delta}(E) = C\,E^{1,7}\,\frac{\int_0^{\pi/2}\cos^{3,4}\vartheta\cos^2\vartheta\,d\cos\vartheta}{\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\,d\cos\vartheta} = \frac{2\,C}{6{,}4}\,E^{1,7} = 0{,}85\cdot 10^{-3}\,E^{1,7}$$

$$p_{on} = 0{,}85\cdot 10^{-3}\,E^{1,7}\cdot\nu(E)$$

(E in eMV, ν = Absorptionskoeffizient für Neutronen in cm²/g).

Fig. 15 zeigt den Wirkungsquerschnitt von Neutronen gegen Wasserstoff nach neueren Messungen[12]) zusammen mit einer Formel von

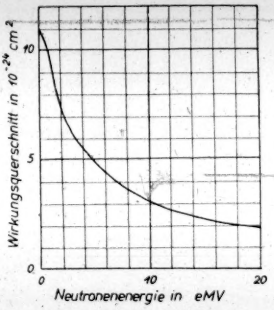

Fig. 15. Atomarer Wirkungsquerschnitt von Wasserstoff gegen Neutronen.

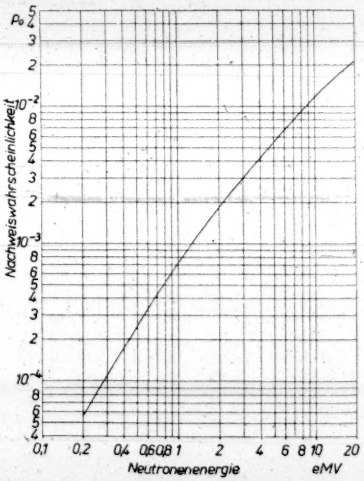

Fig. 16. Nachweiswahrscheinlichkeit für Neutronen, die senkrecht auf eine Paraffinplatte auftreffen.

Schwinger und Teller 1937. Fig. 16 zeigt die Neutronenempfindlichkeit p_{on}, wie man sieht, nimmt sie stark mit der Neutronenenergie zu, etwas mehr als proportional.

12) Siehe Zinn, Sealy und Cohen 1939.

e) Ultrastrahlkoinzidenzen.

Bei den meisten Messungen verursachen die Ultrastrahlkoinzidenzen eine unvermeidliche Erhöhung des Nulleffektes. Auf den cm² der Erdoberfläche fallen in Meereshöhe 0,025 Einzelstrahlen in der Sekunde ein, wobei alle koinzidenzfähigen Teilchen mit mehr als etwa 10 eMV Energie mitgerechnet sind. Die Richtungsverteilung dieser Strahlen in Abhängigkeit vom Zenitwinkel φ läßt sich angenähert darstellen durch

$$N(\varphi)\,d\omega = N(0°)\cos\varphi\,d\omega$$

(Linke 1916, neuere Messung Johnson und Stevenson 1933).

Die Ultrastrahlkoinzidenzen bei den Koinzidenzmessungen der Kernphysik entstehen zum größten Teil durch diese Einzelstrahlen. Die Ultrastrahlschauer spielen eine geringere Rolle. Man kann daher die obigen Daten dazu verwenden, um bei einer gegebenen Ordnung die Zahl der Ultrastrahlkoinzidenzen vorherzusagen. Eine ausführliche mathematische Behandlung des Problems stammt von Tuwim 1931 und Janossy 1936.

Bei zwei Zählrohren, die parallel liegen müssen, wird die Zahl der Ultrastrahlkoinzidenzen am geringsten, wenn man die Zählrohre waagerecht nebeneinander legt.

6. Koinzidenzanordnungen

Koinzidenzmessungen können auf die Kopplung der verschiedensten Strahlenarten angewandt werden. Im folgenden sollen die verschiedenen Anordnungen zusammengestellt und kurz beschrieben werden, mit denen solche Messungen in der Kernphysik angestellt worden sind.

a) Absorptionsmessungen an sekundären β-Strahlen.

Gewöhnliche Absorptionsmessungen sind an sekundären β-Strahlen nicht leicht möglich, weil im Absorber neue Strahlen entstehen, die den Absorptionseffekt überdecken. Um sicher zu sein, daß nur solche Strahlen gemessen werden, die den Absorber wirklich durchsetzt haben, stellt man seit Bothe und Kolhörster 1928 einen Zähler vor und einen zweiten hinter dem Absorber auf und mißt die koinzidierenden Ausschläge. Fig. 17a und b zeigen zwei Anordnungen. Die erste, von Bothe und Kolhörster stammend, mit sehr dünnen Zählrohrwänden, ist sehr geeignet für weiche Sekundärstrahlen. Die zweite ist für γ-Energien über etwa 1 eMV meist gebräuchlich. Wegen der großen Nachweiswahrscheinlichkeit für β-Strahlen wird die Koinzidenzhäufigkeit ebenfalls groß, so daß der Nulleffekt durch Ultrastrahlung keine wesentliche Rolle spielt. Auch die zufälligen Koinzidenzen können durch entsprechendes Auflösungsvermögen des Verstärkers verringert werden. Man kann daher in vielen Fällen auf eine jedesmalige Bestimmung des Nulleffektes verzichten. Eine geringe Zahl von falschen Koinzidenzen entsteht

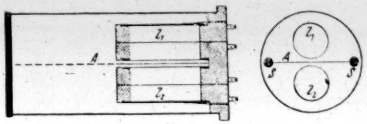

Fig. 17a.

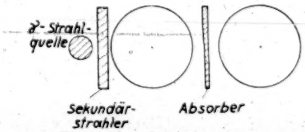

Fig. 17b.

Fig. 17. Anordnung zur Absorptionsmessung an sekundären β-Strahlen.
a Anordnung für weiche Strahlen, *b* für härtere Strahlen.

durch doppelten Comptoneffekt: Es kommt manchmal vor, daß die Streustrahlung eines γ-Strahls, dessen Rückstoßelektronen im ersten Zähler nachgewiesen werden, im zweiten Zähler noch ein Elektron auslöst.

b) Koinzidenzen zwischen schweren Teilchen und γ-Strahlen.

Schwere Teilchen können im Proportionalbereich eines Zählrohrs nachgewiesen werden. Dies bietet eine Reihe von Vorteilen: Die Ausschlagszahl des Proportionalzählers bleibt klein, auch wenn er von vielen β-Strahlen durchsetzt

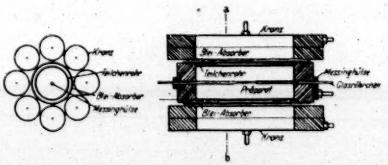

Fig. 18. Anordnung von v. Baeyer für p-γ-Koinzidenzen.

wird; sein Nulleffekt ist nur von der Größenordnung 1/min oder weniger, so daß auch seltene Prozesse gezählt werden können; bei der Koinzidenzmessung entfallen die Ultrastrahlkoinzidenzen und man ist frei von allen ungewünschten Koinzidenzen durch β-Strahlen. In der Anordnung von v. Baeyer (Fig. 18) ist große

„Lichtstärke" dadurch erreicht, daß die Strahlenquelle im Inneren des „Zähldrahts" des Proportionalzählers untergebracht ist. Der „Zähldraht" besteht aus einem versilberten Quarzröhrchen von 2 mm Durchmesser und einer Dicke von etwa 10 cm Luftäquivalent. Die γ-Strahlung wird in einem Kranz von parallelgeschalteten γ-Zählrohren nachgewiesen, die um den Proportionalzähler gelegt sind. Zur Nulleffektsmessung kann der Proportionalzähler mit dem Präparat herausgenommen werden; die γ-Ausschläge werden durch ein kleines γ-Präparat auf den alten Wert gebracht. Die Nachweiswahrscheinlichkeit für γ-Strahlung von 3 eMV beträgt in dieser Anordnung nach v. Baeyer 0,42 Proz. Die Nachweiswahrscheinlichkeit für Protonen ist durch die Absorption in dem Quarzröhrchen des Zähldrahts bestimmt. Bei größeren Protonenenergien kann außerdem nur ein Teil der Ausschläge gezählt werden, da der Rest von β-Ausschlägen nicht zu unterscheiden ist. Auch mit Neutronen sind Koinzidenzmessungen angestellt worden (Maier-Leibnitz 1936). Dazu wurde in das Innere des Zähldrahts noch eine dünne Paraffinschicht gebracht, an der die Neutronen Rückstoßprotonen auslösten.

c) γ-γ-Koinzidenzen.

Zur Untersuchung der Koinzidenzen zwischen γ-Strahlen werden zwei Zählrohre nebeneinandergelegt und das Präparat dazwischen gebracht (Fig. 19). Diese Anordnung wurde erstmals von Maier-Leibnitz 1936 verwandt. Der

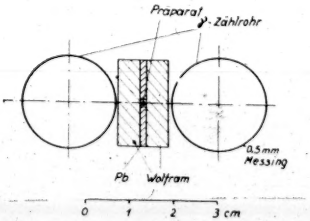

Fig. 19. Anordnung für γ-γ-Koinzidenzen nach Maier-Leibnitz.

Nulleffekt ist dabei zum großen Teil durch die Ultrastrahlung verursacht. Daher werden die Zählrohre klein gehalten (1—2 cm Durchmesser) und waagerecht nicht zu nahe nebeneinandergelegt. Unerwünschte Koinzidenzen können in dieser Anordnung entstehen durch die Streustrahlung beim Comptoneffekt, durch die Bremsstrahlung der γ-Strahlen, sowie durch die paarweise ausgesandte Vernichtungsstrahlung von Positronen, die bei der Absorption harter γ-Strahlung entstehen können. Sie werden durch den Wolfram-Absorber in Fig. 19 beseitigt. Meist ist jedoch die Häufigkeit solcher Koinzidenzen gering, wie Feather und Dunworth 1938 gezeigt haben. Die absolute Häufigkeit der systematischen Koinzidenzen ist wegen der kleinen Nachweiswahrscheinlichkeit für γ-Strahlen meist klein; daher ist auf die Ermittlung des Nulleffekts große Sorgfalt zu verwenden. Meist werden nach Entfernung der Strahlenquelle bei sonst ungeänderter Geometrie die Einzelausschläge durch ein genügend weit entferntes γ-Präparat auf denselben Wert gebracht wie bei der Hauptmessung. Eine Berechnung der zufälligen Koinzidenzen mit Hilfe der Daten der Verstärkeranordnung (Dunworth) scheint uns demgegenüber weniger sicher, wenn der Nulleffekt nicht klein gegen den Effekt ist.

d) β-γ-Koinzidenzen.

Die erste grobe Messung an den β- und γ-Strahlen von *RaC* wurde von v. Baeyer mit der Anordnung Fig. 19 ausgeführt. Bothe und Maier-Leibnitz 1937 arbeiteten mit magnetischer Ablenkung der β-Strahlen (Fig. 20). Die Strahlenquelle und beide Zähler befinden sich hier in einem Magnetfeld. Die Arbeitsweise der Zähler wird dadurch nicht schädlich beeinflußt. Die Anordnung hat den Vorteil, daß der Nulleffekt durch Ultrastrahlen wegen der großen Entfernung der beiden Zähler klein ist. Der Öffnungswinkel des Spektrographen (Bothe 1935) betrug $^1/_{40}$ von 4π. Durch das Magnetfeld

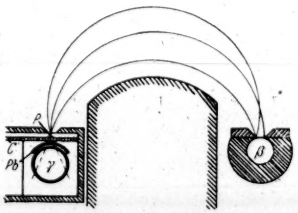

Fig. 20. Anordnung für β-γ-Koinzidenzen mit magnetischer Ablenkung der β-Strahlen.

wurden aus dem Spektrum Energiebereiche mit einer Halbwertbreite von etwa 8 Proz. ausgesondert. Um die unelastische Rückstreuung der Elektronen möglichst zu vermindern, wurde als Unterlage Zellophan gewählt. Eine darunterliegende Bleifolie verhinderte mit Sicherheit den Eintritt primärer β-Strahlen in den γ-Zähler. Die Anordnung liefert einwandfreie, gut mit der Erwartung vergleichbare Ergebnisse. Allerdings muß die Strahlenquelle eine gewisse Intensität

besitzen, da im β-Zähler bei einer Messung nur etwa $^1/_{1000}$ aller β-Strahlen nachgewiesen wird. Bei der Untersuchung schwacher β-Spektren hat daher zuerst Norling die Anordnung Fig. 21 mit zwei nebeneinanderliegenden Zählrohren ähnlich wie bei der γ-γ-Messung verwandt. Um den Nulleffekt durch Ultrastrahlung herabzusetzen, fügte er zwei große Zählrohre in Antikoinzidenzschaltung an. Die Trennung der β-Energiebereiche geschieht hier, weit weniger genau, durch Einschieben von Absorbern. Nach Norling läßt sich auch durch Filterung der γ-Strahlung z. B. der Nachweis führen, welche von zwei verschieden harten γ-Komponenten mit der β-Strahlung koinzidiert.

Die bisher aus solchen Messungen gezogenen Schlüsse sind meist mehr qualitativer Art. Jedoch lassen sich daraus durchaus auch quantitative Angaben machen, wenn man eine solche Anordnung als Standardanordnung wählt, und durch Messungen an verschiedenen Stoffen ihre γ-Empfindlichkeit genau bestimmt, wie das vor allem Dunworth 1940 getan hat.

e) Koinzidenzen zwischen schweren Teilchen und β-Strahlen.

Bei einer Suche nach Koinzidenzen zwischen Protonen und β-Strahlen haben Bothe und

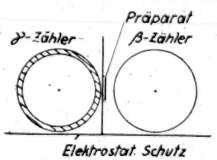

Fig. 21. Anordnung für β-γ-Koinzidenzen nach Norling.

Maier-Leibnitz dieselbe Anordnung verwendet wie Fig. 21, wobei nur der γ-Zähler durch ein Proportionalzählrohr ersetzt war.

f) β-β-Koinzidenzen.

Für die Messung von Koinzidenzen zwischen zwei β-Strahlen sind die Anordnungen Fig. 22a und b geeignet, die von Klemperer 1935 bzw. Norling 1941 stammen. Bei solchen Messungen

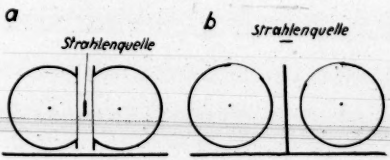

Fig. 22. Anordnung für β-β-Koinzidenzen. *a* nach Klemperer, *b* nach Norling.

ist eine gewisse Zahl (etwa $^1/_{1000}$ der β-Ausschläge) falscher Koinzidenzen kaum zu vermeiden. Erstens können (vor allem bei der ersten Anordnung) in einem Zähler gestreute Elektronen in den anderen Zähler gelangen. Zweitens können schon im Material der Quelle durch Zusammenstoß von β-Strahlen mit Atomelektronen Doppelstrahlen entstehen, die vor allem bei der zweiten Anordnung wirksam sind. Man wird also versuchen, als Quelle eine möglichst dünne Schicht von leichtatomigem Material zu verwenden, wodurch auch die Nachweiswahrscheinlichkeit erhöht wird. Schließlich muß man darauf achten, daß durch das Einschieben der Quelle der Koinzidenznulleffekt sich ändern kann, der bei dünnwandigen Zählrohren zum Teil durch sehr weiche Strahlung verursacht wird.

Feather 1940 beschreibt einen magnetischen Doppelspektrographen, bei dem Koinzidenzen zwischen β-Strahlen getrennter Energiebereiche gemessen werden können. Jedoch sind damit noch keine Untersuchungen ausgeführt.

III. Anwendung von Koinzidenzmessungen auf kernphysikalische Probleme

1. Der Compton-Effekt

Der Stoß eines Lichtquants mit einem Elektron ist seit Compton und Debye eines der deutlichsten Beispiele für die gleichzeitige Korpuskular- und Wellennatur des Lichtquantums. Beim Compton-Effekt gibt ein Lichtquant der Energie $h\nu_0$ einen Bruchteil seiner Energie an ein Elektron ab und fliegt mit dem Rest seiner Energie $h\nu$ nach einer anderen Richtung weiter, während das Elektron sich mit der Rückstoßenergie $h\nu_0 - h\nu$ bewegt. Dabei ergeben sich die Richtungen des gestreuten γ-Strahls und des Elektrons durch einfache Anwendung des Energie- und Impulssatzes. Nach diesem einfachen Bilde werden natürlich auch beide gleichzeitig von einem Punkt aus wegfliegen.

Nun haben Bohr, Kramers und Slater 1924 eine Theorie über das Wesen der Strahlung zur Diskussion gestellt, um eine Anzahl der damals bestehenden Schwierigkeiten für die Vereinbarung der Quantentheorie mit der klassischen Wellentheorie zu beheben. Nach dieser Theorie sollte der Energiesatz nun statistische Gültigkeit, also im Mittel über einen Raum oder eine Zeit, haben. Beim Compton-Effekt sollte dabei die zeitliche Kopplung zwischen der Aussendung der Streustrahlung und der der ß-Strahlen weitgehend aufgehoben sein, die Beziehung zwischen Streustrahlung und Rückstoßelektronen sollte nur im Mittel für eine große Zahl von Streuprozessen gelten.

Hier bestand eine Möglichkeit der experimentellen Entscheidung zwischen der bisherigen Theorie und der Theorie von Bohr, Kramers und Slater durch Untersuchung der zeitlichen Kopplung der Rückstoß- und Streustrahlen. Bothe und Geiger führten diese Entscheidung mit Hilfe der Versuchsanordnung von Fig. 23 herbei. In einem mit Wasserstoff gefüllten Raum durchsetzt ein Primärbündel von Röntgenstrahlen den wirksamen Bereich eines Spitzenzählers. Dabei werden durch den Compton-Effekt Rückstoßelektronen ausgelöst, von denen etwa jedes zehnte zur Zählung gelangte, wie durch besondere Versuche festgestellt wurde. Von den zugehörigen Streustrahlen wurde ein Teil in der Platinfolie des linken Zählers absorbiert, und wieder ein Teil der dabei entstehenden Elektronen ergab in diesem Zähler einen Ausschlag. Die Nachweiswahrscheinlichkeit für die Streustrahlung betrug etwa $^1/_{1000}$. Zu erwarten waren also nach der alten Theorie je $h\nu$-Ausschlag $^1/_{10}$ Koinzidenz, während nach Bohr, Kramers und Slater praktisch keine Koinzidenzen auftreten durften. Tatsächlich wurde eine Koinzidenz auf 11 Ausschläge beobachtet, in voller Übereinstimmung mit der alten Theorie.

Die Feststellung der Koinzidenzen geschah durch photographische Registrierung der Einzelausschläge beider Zähler. Durch einen Kunstgriff konnte die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse bis auf $^1/_{10000}$ Sekunde festgestellt werden. Als Koinzidenz wurden alle Ausschläge gezählt, die weniger als $^1/_{1000}$ Sekunde auseinanderlagen. Die zu erwartenden zufälligen Koinzidenzen ließen sich danach genau berechnen. Eine Schwierigkeit der Messung bestand anfangs darin, daß die Spitzenzähler große Verzögerungen zwischen dem Durchgang des Strahls und dem Beginn des Ausschlags zeigten. Diese Verzögerungen verschwanden, als das elektrische Feld durch Anbringung der in Fig. 23 sichtbaren Wulste an den Spitzen homogener gemacht wurde. Durch eine

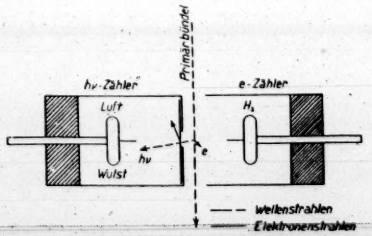

Fig. 23. Anordnung von Geiger und Bothe zum Nachweis der gleichzeitigen Aussendung von Streustrahlung und Rückstoßelektronen beim Comptoneffekt der Röntgenstrahlen.

ausführliche Fehlerdiskussion und mehrere Blindversuche wurde das Ergebnis weiter gesichert. In dieser ersten Untersuchung sind bereits fast alle Gesichtspunkte für Koinzidenzmessungen enthalten.

Später untersuchte Bothe 1926 noch einen zweiten Fall: Bei der fast vollständigen Absorption einer weichen Fluoreszenzstrahlung in zwei durch Spitzenzähler gebildeten Halbräumen sind nach der alten Theorie die Ausschläge unabhängig voneinander, während nach Bohr, Kramers und Slater Koinzidenzen auftreten sollten. Auch hier ergab sich ein eindeutig für die bisherige Theorie sprechendes Ergebnis.

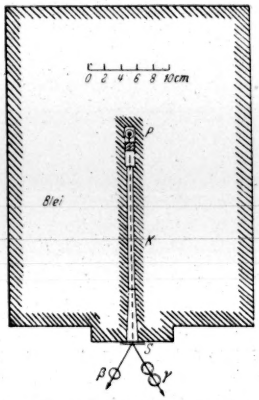

Fig. 24. Anordnung zur Untersuchung des Comptoneffekts der ThC''-γ-Strahlung.

Im Jahr 1936 untersuchte Shankland den Compton-Effekt an γ-Strahlen des *RaC*. Seine Anordnung war ganz ähnlich der von Fig. 24, die später besprochen wird. Es gelang ihm nicht, Koinzidenzen zu finden, und er schloß daraus, daß die Photonenvorstellung hier versagt. Sein Resultat wurde jedoch durch einen Versuch von Bothe und Maier-Leibnitz widerlegt. Fig. 24 zeigt die Versuchsanordnung. Die Strahlenquelle, ein *RaTh*-Präparat von 20 mg Radiumäquivalent, ist in einem großen Bleipanzer eingeschlossen. Durch einen Kanal, der so dimensioniert war, daß möglichst wenig schädliche Streuung an seinen Wänden auftreten konnte, treten γ-Strahlen aus. Sie hatten vorher ein Filter von 1 cm Blei zu durchsetzen; es war daher praktisch nur die homogene Strahlung von 2,65 eMV wirksam. Am Ende des Kanals befand sich der Streukörper, eine Zellophanfolie von 0,028 g/cm². Die Schicht wurde so dünn gewählt, um die Richtung

der entstehenden Rückstoßelektronen möglichst wenig durch Streuung zu verändern. Vor dem Kanal standen die Zählrohre zum Nachweis der Rückstoßelektronen und der Streustrahlung. Wenn ein gestreuter γ-Strahl durch die Mitte des γ-Zählers ging, so mußte der zugehörige Rückstoßstrahl auf den β-Zähler zufliegen.

Tabelle 2

Ergebnisse eines Versuchs

γ-Zähler	86/min
β-Zähler mit Schicht	140/min
ohne Schicht	88/min
Überschuß	52/min
Koinzidenzen in 14,5 Stunden	
mit Schicht	95
ohne Schicht	34
Überschuß	61
Koinzidenzen je Rückstoßelektron	$1{,}4 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 2 zeigt als Beispiel die Ergebnisse einer Meßreihe. Bei den Messungen der Koinzidenzen ohne Streuschicht wurde die Ausschlagszahl des β-Zählers durch ein etwas entferntes Präparat auf die gleiche Häufigkeit gebracht wie beim Hauptversuch. Die Stellung der Zählrohre blieb bei einer Meßreihe stets gleich, um die Zahl der Ultrastrahlkoinzidenzen nicht zu verändern. Dieser Punkt war bei der geringen Zahl der zu erwartenden Koinzidenzen von großer Wichtigkeit. Z. B. stieg der Nulleffekt bei einer geringen Änderung der Geometrie auf das Doppelte.

Die erhaltene Zahl von Koinzidenzen wurde mit der Erwartung verglichen. Relativ zur gemessenen β-Ausschlagszahl wurden erwartet

$$K/N_\beta = w p_{0\gamma}$$

wo p_0 die γ-Empfindlichkeit der beiden γ-Zähler für 2,65 eMV und w die Wahrscheinlichkeit ist, daß der zu einem β-Strahl gehörige Streu-γ-Strahl durch die angezeigten γ-Zähler geht. Die γ-Empfindlichkeit wurde nach anderen Messungen zu $7{,}5 \cdot 10^{-3}$ für beide Zählrohre berechnet. Für w ergab sich durch Berücksichtigung der geometrischen Unvollkommenheit der Anordnung und der Richtungsstreuung der β-Strahlen in der Folie der Wert $^1/_3$ und damit

$$K/N_\beta = {}^1/_3 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-3} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$$

Dabei ist aber noch zu berücksichtigen, daß die gemessene Zahl der β-Ausschläge vielleicht nur zum Teil Rückstoßelektronen der reinen 2,65-eMV-Strahlung darstellt. Dadurch erklärt sich zwangslos die Differenz gegen den gemessenen Wert von $1{,}4 \cdot 10^{-3}$.

Auch die absolute Häufigkeit der Koinzidenzen läßt sich berechnen mit Hilfe der wohlbegründeten Annahme, daß 1 mg Radiumäquivalent *RaTh* $1{,}57 \cdot 10^7$ γ-Quanten von 2,65 eMV aussendet. Danach erhält man mit Hilfe des Wirkungsquerschnittes für den Compton-Effekt nach Klein-Nishina eine Koinzidenzerwartung, die bis auf 10 Proz. mit der gemessenen übereinstimmt.

Darüber hinaus konnte bei diesen Versuchen noch gezeigt werden, daß auch die Kopplung der Richtungen beim Compton-Effekt der Erwartung entspricht.

Wurden die Winkel der Zählrohre zur Achse, von der Streuschicht aus gesehen, zu groß oder zu klein gewählt (45° bzw. 21° statt des richtigen Winkels von 30°), so sank die Koinzidenzhäufigkeit bis fast auf die des reinen Nulleffektes ab. Diese Aussage war bei dem ersten Versuch von Bothe und Geiger nicht möglich gewesen.

Kurze Zeit danach veröffentlichten Jakobsen und später Shankland selbst weitere Versuche, die die von Bothe und Maier-Leibnitz in vollem Umfang bestätigten. Damit kann man die Gültigkeit des Energiesatzes bei Elementarprozessen erneut als bewiesen betrachten.

2. γ-Energiemessung mit Koinzidenzen

Die Methode, die von Bothe und Kolhörster stammt, benützt die Absorption der sekundären γ-Strahlen, um daraus auf die γ-Energie zu schließen. Die Anordnung ist bereits früher besprochen (II, 6a). Durch Variation der Absorberdicke zwischen den zwei Zählrohren in Fig. 17 erhält man die Absorptionskurve der Sekundärelektronen. Dabei sind noch die Dicken der beiden Zählrohrwände zu berücksichtigen, die wegen des teilweise schiefen Durchtritts mit einem Faktor von etwa 1,5 zu multiplizieren sind (nach einer Abschätzung von Fleischmann 1936). Der genaue Wert des Faktors hängt natürlich von der Anordnung ab. Fig. 25 zeigt die so erhaltene Absorptionskurve der sekundären Elektronen der *ThC''*-Strahlung von 2,65 eMV nach einer Messung von Fleischmann 1936.

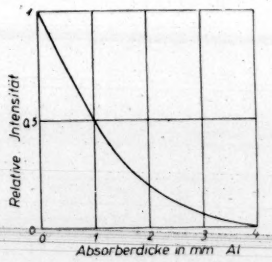

Fig. 25. Absorptionskurve der sekundären β-Strahlen von *ThC*

Um aus einer solchen Kurve auf die γ-Energie zu schließen, kann man auf verschiedene Weise vorgehen. Ein Teil der Autoren, zuerst Becker und Bothe, dann Rasetti, Fleischmann u. a., verwenden die Halbwertdicke der Absorptionskurve (oder auch die Viertelwertdicke), andere, z. B. Kikuchi und Mitarbeiter 1936, Bernardini und Franchetti 1937, Curran, Dee und Petrcilka 1938, Bennett, Bonner und Watt

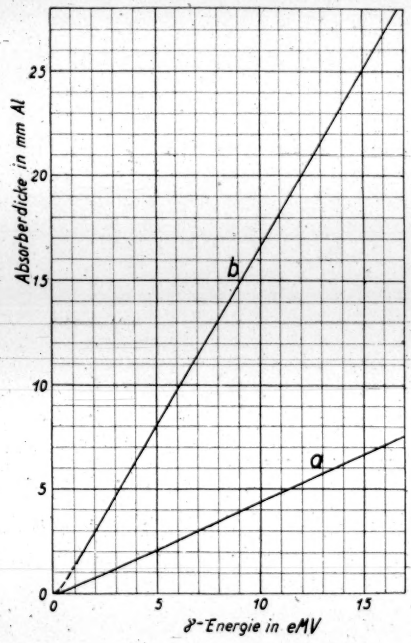

Fig. 26. Zusammenhang zwischen der γ-Energie und a der Halbwertdicke, b dem Endpunkt der Absorptionskurve sekundärer β-Strahlen in Aluminium.

1941 bestimmen den Endpunkt der Absorptionskurve. Die beiden Methoden sind nicht ganz gleichwertig. Die erste ist sehr geeignet bei schwachen Intensitäten, während die zweite genaue Messungen bei großen Absorberdicken erfordert (nach Bennett und Mitarbeitern z. B. bei $^1/_{20}$ bis $^1/_{50}$ der Intensität ohne Absorber). Wenn die γ-Strahlung aus verschiedenen Komponenten besteht, entspricht die Halbwertdicke eher ihrer mittleren Energie, während der Endpunkt der Absorptionskurve durch die energiereichste Komponente bestimmt sein wird, vorausgesetzt, daß diese nicht zu schwach ist. Der Definition des Endpunktes haftet für diesen Fall zweifellos eine gewisse Willkür an.

Die Beziehung zwischen der γ-Energie und der Halbwertdicke bzw. dem Endpunkt der Absorptionskurve wird mit Hilfe einer Eichkurve hergestellt. Diese Eichkurve ist fast linear, so daß zu ihrer Festlegung nur sehr wenig Punkte nötig sind. Becker und Bothe geben für die Halbwertdicke D in mm Al bei Absorption in Aluminium die theoretisch begründete Formel:

$$D = 0{,}233 \frac{E/mc^2}{Emc^2 + 1},$$

wobei der Zahlenfaktor empirisch mit Hilfe der 2,65-eMV-Strahlung von ThC'' bestimmt ist. Fig. 26 gibt Eichkurven nach Messungen einiger Autoren für die beiden Fälle wieder. Dabei ist zu bemerken, daß genau genommen die Form der Kurven auch von der geometrischen Anordnung und von der Lage und Ausdehnung der γ-Strahlquelle abhängen. Es ist möglich, daß das besonders bei Messungen der Halbwertdicke zutrifft, wogegen der Endpunkt von der Geometrie weitgehend unabhängig sein sollte. Es ist auf jeden Fall gut, für eine neue Anordnung eine besondere Eichkurve oder mindestens einen Vergleichspunkt zu bestimmen.

Eine theoretische Berechnung der Eichkurven ist wegen der komplizierten Vielfachstreuung der Elektronen beim Durchgang durch den Absorber nur näherungsweise möglich. Bethe u. a. 1938 nehmen als Näherung für das wirkliche Verhalten der Elektronen an, daß diese vom Entstehungspunkt erst ein Stück geradlinig laufen, und daß dann reine Diffusion einsetzt. In dieser Form läßt sich das Problem quantitativ behandeln, und die danach berechnete Eichkurve für die Halbwertdicke stimmt, ohne empirische Faktoren, gut mit der halbexperimentellen Kurve von Becker und Bothe überein. Im Anschluß an diese Arbeit behandelt Rose 1938 auch die Frage der Erkennbarkeit einer zusammengesetzten γ-Strahlung: Wegen der nahe exponentiellen Form der Absorptionskurve ist ihre Aufteilung in verschiedene Komponenten höchstens sehr angenähert möglich.

3. Aussendung von Teilchen- und γ-Strahlung bei der künstlichen Umwandlung von Atomkernen

Die künstliche Umwandlung eines Elementes läßt sich nach dem in Fig. 27 gezeigten Schema darstellen. Durch Einfangen des stoßenden Teilchens wandelt sich der beschossene Kern zunächst in einen Zwischenkern um, um von da durch Aussendung eines Teilchens in den Endkern

überzugehen. Oft entsteht dabei zunächst nicht der Grundzustand des Endkerns, sondern ein angeregter Zustand, der dann durch Aussendung von γ-Strahlung, eventuell über einen

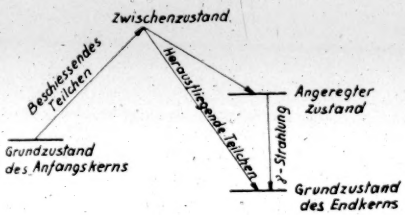

Fig. 27. Einfaches Umwandlungsschema.

weiteren angeregten Zustand in den Grundzustand übergeht. Aus einem solchen Schema ergeben sich zeitliche Kopplungen zwischen den einzelnen Teilchengruppen und γ-Strahlen. Mit Hilfe von Koinzidenzmessungen kann man daher die Richtigkeit des Schemas nachprüfen oder neue Gesichtspunkte für seine Aufstellung gewinnen. Messungen dieser Art sind bisher für die Umwandlung des Bors sowie des Berylliums durch α-Strahlen angestellt worden.

a) Bei der Umwandlung

$$5B^{10} + {}_2\alpha^4 = {}_6C^{13} + {}_1p^1 + \gamma$$

entstehen nach übereinstimmenden älteren Messungen im wesentlichen zwei Protonengruppen, deren Luftreichweite bei Beschießung mit Polonium-α-Strahlen 33 und 75 cm beträgt. Außerdem entsteht eine γ-Strahlung mit einer mittleren Energie von 3 eMV (Becker und Bothe 1932; nach einer späteren Messung von Bothe und Maier-Leibnitz 1937 b besteht sie aus verschiedenen Komponenten, darunter einer starken von 2,5 eMV). Es lag nahe, anzunehmen, daß die längere Protonengruppe direkt zum Grundzustand von C^{13} führt, und daß die kürzere Gruppe mit der γ-Strahlung gekoppelt ist. Dies wurde von Bothe und v. Baeyer mit der früher besprochenen Anordnung (Fig. 19) experimentell bestätigt. Bei der kürzeren Gruppe traten Koinzidenzen in der berechneten Häufigkeit auf, während die lange Gruppe sich nicht mit γ-Strahlen gekoppelt zeigte.

Wenig später wurde jedoch eine neue Schwierigkeit bei dieser Erklärung deutlich. Man kann nämlich die Energietönung des Prozesses auch mit Hilfe der Massen der beteiligten Kerne ausrechnen, die heute recht genau bekannt sind. Und danach berechnet sich die Wärmetönung, bezogen auf den Grundzustand, rund 1 eMV höher als die zu der langen Protonengruppe gehörige. Bei der daraufhin angestellten Nachforschung nach einer längeren Gruppe fanden Maier-Leibnitz und Maurer in der Tat eine sehr schwache Gruppe von 91 cm Reichweite. Damit aber entstand ein neues Problem, denn nun müßte die 75-cm-Gruppe mit γ-Strahlen gekoppelt sein. Bothe und Maier-Leibnitz wiederholten daher den Versuch von v. Baeyer unter verbesserten Bedingungen und fanden dasselbe negative Resultat. Daraufhin wurde geprüft, ob vielleicht statt der γ-Strahlen eine durch innere Umwandlung entstandene β-Strahlung mit den Protonen koinzidierte. Auch dies war nicht der Fall. Danach blieb nur die Erklärung, daß es sich bei dem zu der 75-cm-Gruppe gehörenden Energieniveau um einen isomeren Zustand des Kerns C^{13} handelt. Es wurde versucht, die danach vielleicht zu erwartende nachträgliche γ- oder β-Strahlung nachzuweisen, jedoch war dieser Versuch aus Intensitätsgründen nicht entscheidend.

b) Die Umwandlung

$${}_4Be^9 + {}_2\alpha^4 = {}_6C^{12} + {}_0n^1 + \gamma.$$

Bei der Beschießung von Beryllium mit α-Strahlen wurde zuerst die γ-Strahlung von Becker und Bothe festgestellt. Die weitere Untersuchung des Prozesses führte dann zur Entdeckung des Neutrons. Das Neutronenspektrum zeigt zwei Hauptgruppen. Außerdem hat Bothe 1936 das β-Spektrum der Sekundärelektronen der γ-Strahlung aufgenommen und drei γ-Linien von 6,7; 4,2; 2,7 eMV gefunden. Die Summe der Energien der zweiten und dritten Linie ist innerhalb der Versuchsfehler gleich der der ersten

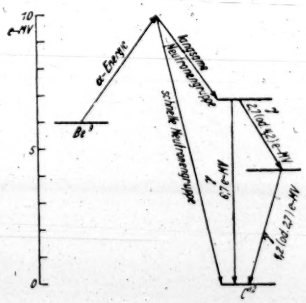

Fig. 28. Schema der Umwandlung
${}_4Be^9 + {}_2\alpha^4 = {}_6C^{12} + {}_0n^1 + \gamma$.

Linie, und diese wiederum entspricht der Differenz der aus den beiden Neutronengruppen folgenden Wärmetönungen. Damit ergibt sich das in Fig. 28 gezeigte Umwandlungsschema. Hier gibt es zwei Möglichkeiten einer Prüfung durch

Koinzidenzmessungen: erstens die Kopplung der Neutronen mit der γ-Strahlung und zweitens die gleichzeitige Aussendung zweier γ-Strahlen.

Die erste Prüfung (Maier-Leibnitz 1936) wurde mit fast derselben Anordnung vorgenommen wie bei der Messung v. Baeyers an Bor. Nur mußte jetzt im „Zähldraht" des Proportionälzählers außer dem Poloniumpräparat und dem Beryllium noch eine Schicht von Paraffin untergebracht werden, in der durch die Neutronen Rückstoßprotonen ausgelöst wurden. Die Nachweiswahrscheinlichkeit für die Neutronen war nur $1{,}2 \cdot 10^{-4}$, im Proportionalzähler wurden nur 7 Neutronenausschläge/min gezählt. Entsprechend betrug die Zahl der systematischen Koinzidenzen nur 2 je Stunde. Dafür konnte die Zahl der zufälligen Koinzidenzen klein gehalten werden. Die Messung wurde als eine Vergleichsmessung für Beryllium und Bor angelegt. Bezogen auf einen Protonenausschlag ergab sich für Beryllium eine größere Koinzidenzhäufigkeit, wie das auch wegen der höheren γ-Energie erwartet werden muß.

Die Prüfung auf Koinzidenzen zwischen γ-Strahlen geschah mit Hilfe der früher besprochenen Anordnung von Fig. 19. Die Anordnung war für γ-Zählung um den Faktor 4,85 lichtschwächer als der Zählrohrkranz von v. Baeyer. In je 60 Stunden Meßzeit für Effekt und Nulleffekt wurde das Auftreten systematischer Koinzidenzen sichergestellt. Durch einen besonderen Versuch wurde geprüft, daß diese Koinzidenzen nicht von der natürlichen γ-Strahlung des Poloniums rührten, die etwa 35 Proz. der Einzelausschläge der Zählrohre verursachte.

Die Ergebnisse der beiden Messungen wurden auch quantitativ ausgewertet. Es wurde jeweils die Relativzahl der Koinzidenzen, bezogen auf 1000 vom Beryllium rührende Protonen- bzw. beim zweiten Versuch γ-Ausschläge betrachtet. Diese Zahl, die nach Gleichung (10a) gleich der Nachweiswahrscheinlichkeit für die beteiligte γ-Strahlung ist, wurde mit der entsprechenden der Vergleichsmessung an Bor verglichen. Es ergab sich eine vollkommene Übereinstimmung der Ergebnisse mit den aus dem Schema Fig. 27 berechneten Werten. Das genaue Termschema des C^{12} ist etwas komplizierter (Bernardini 1938).

4. Natürlicher und künstlicher β-Zerfall mit γ-Strahlung

Die Umwandlung eines radioaktiven Kerns durch Aussendung von β-Strahlen unterscheidet sich dadurch von anderen Umwandlungen, daß der Übergang von einem Energiezustand des Ausgangskerns zu einem anderen durch die Emission nicht einer scharfen β-Linie, sondern eines ganzen β-Spektrums gekennzeichnet ist, wobei die obere Grenze des Spektrums der Energietönung entspricht. Im allgemeinen Fall, bei dem durch die Umwandlung verschiedene Energiezustände des Endkerns besetzt werden, werden sich verschiedene solche einfachen Spektren zu einem zusammengesetzten β-Spektrum vereinigen, und es wird dann ein Teil der β-Strahlen mit γ-Strahlung gekoppelt sein. Hier wird die Koinzidenzmethode mehr noch als bei den anderen Umwandlungen oft unentbehrlich sein, um das Energieschema zu klären. Sie ist in den letzten Jahren auf verschiedene radioaktive Kerne angewandt worden. Im folgenden sollen die wesentlichen Ergebnisse dieser Untersuchungen wenigstens kurz besprochen werden.

a) Radium *C*.

Das β- und γ-Spektrum von *RaC* gehört zu den am besten untersuchten Strahlungen, allerdings liegt hier auch zugleich der komplizierteste aller bekannten Fälle vor. Aus der Form des β-Spektrums kann man nur schließen, daß es

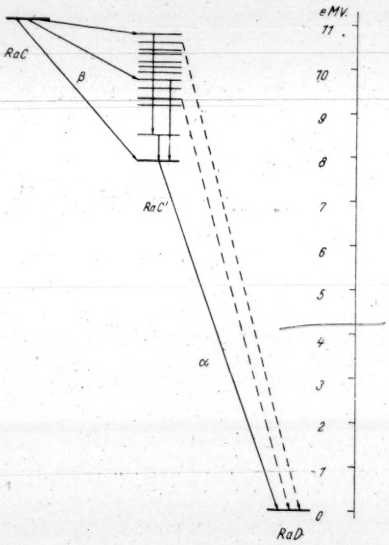

Fig. 29. Zerfallsschema von *RaC* über *RaC'* in *RaD*.

zusammengesetzt ist, eine Zerlegung in Teilspektren ist nicht möglich. Dafür sind hier eine ganze Anzahl angeregter Energiezustände direkt bekannt aus den Energien der α-Strahlen großer Reichweite, die beim Zerfall von *RaC'* in *RaD* entstehen. In Fig. 29 ist das Zerfallsschema mit

den danach bekannten Energiezuständen eingetragen. Die γ-Strahlung ist ebenfalls recht genau aus dem Spektrum der durch innere Umwandlung entstehenden β-Strahlen bekannt. Sie besteht aus einer sehr großen Zahl von Linien, zu deren Einordnung die Zahl der aus den weitreichenden α-Strahlen bekannten Terme nicht ausreicht. Ellis und Oppenheimer haben den Versuch gemacht, ein vollständiges Termschema unter Benützung der Energien und Intensitäten aller γ-Linien aufzustellen. Sie kamen dabei zu dem Schluß, daß alle β-Übergänge zu angeregten Zuständen führen sollten, daß also der Grundzustand über eine γ-Strahlung erreicht wird. Wegen der im Vergleich zu den optischen Spektren geringen Meßgenauigkeit von γ-Energien ist die Einordnung der γ-Linien zu einem Termschema mit einer gewissen Willkür behaftet. Zu berücksichtigen ist noch bei *RaC*, daß innerhalb der Meßgenauigkeit sehr einfache, vielleicht nicht zufällige Beziehungen schon zwischen den durch die weitreichenden α-Strahlen gegebenen Termen bestehen. Es ist möglich, die ganzen Beziehungen zwischen diesen Termen durch einfache Summen von vier Energien zu beschreiben, von denen die eine gerade die stärkste Linie des Spektrums ist (s. Fig. 30). Unter diesen Umständen kann man nicht erwarten, daß ein Schema wie das von Ellis und Oppenheimer aufgestellte das einzige mögliche darstellt. Eine Prüfung kann durch Koinzidenzmessungen vorgenommen werden.

Die erste Koinzidenzmessung an *RaC* wurde von v. Baeyer mit seiner bereits beschriebenen Apparatur durchgeführt. Er brachte dabei die Strahlenquelle, ein kleines Emanationspräparat, teils im Zähldraht unter, teils ließ er die Emanation direkt in das Zählvolumen eintreten, so daß gar keine Absorption der β-Strahlen erfolgte. Bei beiden Messungen traten Koinzidenzen auf, und es zeigte sich, daß mit Absorber die Zahl der Koinzidenzen abnahm, wie das bei einer allgemeinen Richtigkeit des Schemas sein muß.

Bothe und Maier-Leibnitz haben die β-Strahlen durch magnetische Ablenkung getrennt und Koinzidenzmessungen mit der Anordnung von Fig. 20 vorgenommen. Es zeigte sich, daß nur die langsameren β-Strahlen mit γ-Strahlen gekoppelt sind; bei großen β-Energien traten keine Koinzidenzen in merklicher Häufigkeit auf. Bothe und Maier-Leibnitz zogen daraus den Schluß, daß im Gegensatz zu dem Termschema von Ellis und Oppenheimer das energiereichste Teilspektrum der γ-Strahlen einem direkten Übergang zum Grundzustand entspricht. Das Schema der Fig. 29 ist dieser Ansicht entsprechend gezeichnet.

An anderen, besonders künstlichen β-Strahlern sind Messungen nach der Absorptionsmethode ohne magnetische Trennung der β-Strahlen angestellt worden, zuerst von Norling 1938 an As^{76}. Später sind auch Na^{24} von Feather und Dunworth 1938 und von Langer, Mitchell und Daniel 1939, Mn^{56} von Dunworth 1939, Norling 1939, Langer, Mitchell und Daniel 1939, außerdem von den letzteren Autoren Indium und von Norling Gold untersucht worden. Bei der Absorptionsmethode ist eine genaue Aufteilung des β-Spektrums in Teilspektren nicht möglich, diese wird vielmehr durch eine Analyse der Form des β-Spektrums versucht und ist bisher aus theoretischen wie aus experimentellen Gründen noch unsicher. Die Umwandlungsschemata, die von den genannten Autoren mit Hilfe des bisherigen experimentellen Materials, zum Teil auch unter Hinzunahme von γ-γ-Koinzidenzmessungen, aufgestellt worden sind, stimmen daher noch nicht in allen Einzel-

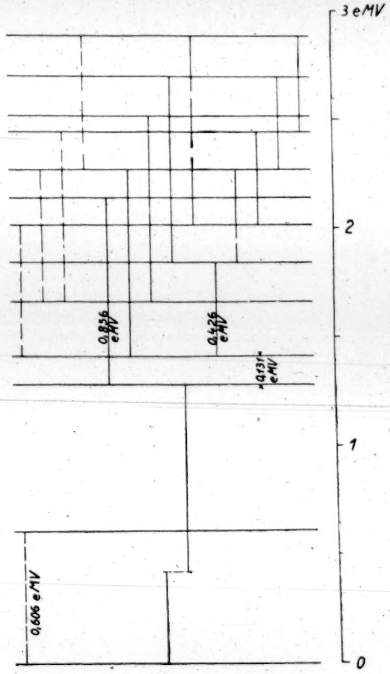

Fig. 30. Zahlenbeziehungen zwischen den bekannten Energiezuständen von *RaC'*.

heiten überein. Beim *ThC''* dagegen, dessen γ-Spektrum sehr genau bekannt und relativ einfach ist, haben Feather und Dunworth 1938 durch Koinzidenzmessungen das von Oppenheimer aufgestellte Termschema quantitativ bestätigt gefunden. Bei Au^{198}, das von Norling 1941 untersucht wurde, ist ein Teil der γ-Energie umgewandelt und wird als β-Linie ausgestrahlt. Norling hat entsprechend β-β-Koinzidenzen nachgewiesen. Zur genaueren Untersuchung solcher Koinzidenzen, vor allem bei natürlich radioaktiven Körpern, hat Feather 1940 ein magnetisches Doppelspektrometer konstruiert.

5. Andere Messungen

Die Koinzidenzmethode erlaubt noch eine ganze Reihe von Anwendungen, von denen bis heute nur ein Teil ausgeführt worden ist. Im folgenden sollen einige bisher nicht besprochene Messungen wenigstens erwähnt werden.

Klemperer 1935 hat untersucht, ob bei natürlich radioaktivem Kalium die abnorm lange Halbwertzeit etwa dadurch zustande kommt, daß nicht wie gewöhnlich ein, sondern zwei Elektronen je Zerfall ausgesandt werden. Er fand jedoch keine β-β-Koinzidenzen. Es handelt sich vielmehr um einen verbotenen β-Übergang zwischen zwei Kernen von sehr verschiedenem Kernspin.

Adam 1937 hat versucht, die Winkelverteilung der Elektronen und Positronen, die bei der Paarbildung durch γ-Strahlen entstehen, mit Hilfe von Koinzidenzen zu untersuchen. Eine ähnliche Arbeit von Alichanian, Dzelepow und Spivak 1938 bezieht sich auf die innere Paarbildung, die gleich bei der Aussendung der γ-Energie erfolgt. Benedetti 1941 hat die Koinzidenzen bei den β-Strahlungen des aktiven Niederschlags von Thorium ausführlich untersucht. Klemperer 1934, Alichanian u. a. 1936 und später Feather und Dunworth 1938 haben die paarweise Aussendung von zwei γ-Quanten in entgegengesetzten Richtungen bei der Vernichtung eines Positrons festgestellt, wie sie von der Theorie erwartet wurde. Letztere versuchten ferner, die Häufigkeit der Paarbildung durch β-Strahlen mit Hilfe der Koinzidenzen von Vernichtungs-γ-Strahlen nachzuweisen.

Schließlich haben Feather und Dunworth 1938 die Methode der γ-γ-Koinzidenzen auf die γ-Strahlung der metastabilen Kerne *UX* und *Ag* angewandt. Sie finden dabei eine hohe Koinzidenzhäufigkeit, was mit der Anschauung in Einklang steht, daß nach v. Weizsäcker die metastabilen Zustände eines Kerns einen vom Grundzustand wesentlich verschiedenen Spin besitzen sollen. Man muß danach häufig Übergänge in mehreren Stufen erwarten. Feather und Dunworth schließen aus ihren Messungen, daß z. B. bei Silber nicht weniger als vier γ-Übergänge hintereinander folgen sollen.

Kennedy u. a. 1939 haben beim metastabilen Zn^{69} einen interessanten Versuch gemacht. Hier treten ebenfalls β- und γ-Strahlen auf. Durch die Umwandlung entsteht ein β-radioaktiver Kern, mit einer Halbwertzeit von 57 Minuten. Dieser Kern besitzt einen angeregten Zustand von sehr großer Lebensdauer, der durch eine γ-Strahlung mit 12,8 Stunden Halbwertzeit in den Grundzustand übergeht, worauf dann wieder der β-Zerfall mit 57 Minuten folgt. Durch Koinzidenzmessungen wurde gezeigt, daß tatsächlich die γ-Strahlung nicht gleichzeitig mit β-Strahlen auftritt; damit wurde die eben beschriebene Erklärung bestätigt.

Die Koinzidenzmethode läßt sich auch auf nicht ganz gleichzeitige Vorgänge anwenden. So haben Dunworth 1939 und Rotblat 1940 die Halbwertzeit von *RaC'* gemessen, indem sie die Auflösungszeit des Verstärkers variierten. Die Grenze dieses Verfahrens liegt, wie schon früher besprochen, darin, daß die Entladung des Zählrohrs nicht immer sofort nach dem Durchgang des Teilchens einsetzt, sondern daß Verzögerungen der Größenordnung 10^{-6} sec auftreten.

Es ist mir ein Bedürfnis, Herrn Professor Bothe für sein freundliches Interesse an dieser Arbeit zu danken.

Literaturverzeichnis

Adam, H., Naturwiss. **25**, 13, 1937.
Alaoglu, L., und N. M. Smith, Phys. Rev. **53**, 832, 1938.
Alichanian, A. J., A. J. Alichanow und L. A. Arzimowitsch, Nature **137**, 703, 1936; C. R. Moskau 1936 (1), 287.
Alichanian, A., B. Dzelepow und P. Spivak, C. R. Moskau **19**, 379, 1938.
Alfvén, H., und P. Ohlin, Zeitschr. f. Phys. **90**, 416, 1934; **89**, 826, 1934.
Anderson, B., Zeitschr. f. Phys. **98**, 597, 1936.
Arnold, W., O. R. Frisch und H. Levi, Rev. Sci. Instr. **10**, 197, 1939.
Baeyer, H. J. von, Zeitschr. f. Phys. **95**, 417, 1935.
Barnothy, J., Naturwiss. **21**, 825, 1933.
Becker, H., und W. Bothe, Zeitschr. f. Phys. **76**, 421, 1932.
Benedetti, S., Phys. Rev. **59**, 463, 1941; Journ. Phys. et Rad. (VIII) **7**, 265, 1941.
Bennett, W. E., T. W. Bonner und B. E. Watt, Phys. Rev. **59**, 793, 1941.
Bernardini, G., und S. Franchetti, Ric. Sci. (II) **2**, 2, 1937.
Bethe, H. A., M. E. Rose und L. P. Smith, Proc. Amer. Phil. Soc. **78**, 573, 1938.
Bothe, W., und H. Geiger, Zeitschr. f. Phys. **26**, 44, 1924; **32**, 639, 1925.

Bothe, W., Zeitschr. f. Phys. **37**, 547, 1926.
Bothe, W., und W. Kolhörster, Naturwiss. **16**, 1045, 1928; **17**, 271, 1929; Zeitschr. f. Phys. **56**, 751, 1929.
Bothe, W., Zeitschr. f. Phys. **59**, 1, 1929.
Bothe, W., und H. Becker, Naturwiss. **18**, 705, 1930.
Bothe, W., und H. J. von Baeyer, Göttinger Nachr. **1**, 195, 1935.
Bothe, W., Zeitschr. f. Phys. **96**, 607, 1935.
Bothe, W., Zeitschr. f. Phys. **100**, 273, 1936 (a).
Bothe, W., Physik. Zeitschr. **37**, 520, 1936 (b).
Bothe, W., und H. Maier-Leibnitz, Göttinger Nachr. **2**, 127, 1936; Phys. Rev. **50**, 187, 1936; Zeitschr. f. Phys. **102**, 143, 1936.
Bothe, W., und H. Maier-Leibnitz, Zeitschr. f. Phys. **104**, 604, 1937 (a).
Bothe, W., und H. Maier-Leibnitz, Zeitschr. f. Phys. **107**, 513, 1937 (b).
Brown, S. C., Phys. Rev. **59**, 954, 1941.
Curran, S. C., P. J. Dee und V. Petrcilka, Proc. Roy. Soc. London (A) **169**, 269, 1938.
Curran, S. C., und V. Petrcilka, Proc. Cambr. Phil. Soc. **35**, 309, 1939.
Danforth, W. E., und W. E. Ramsey, Phys. Rev. **49**, 854, 1936.
Droste, G. von, Zeitschr. f. Phys. **104**, 474, 1937; **100**, 529, 1936.
Duffendack, O. S., H. Lifschutz und M. M. Slawsky, Phys. Rev. **52**, 1231, 1937.
Dunworth, J. V., Nature **143**, 1065, 1939 (a).
Dunworth, J. V., Nature **144**, 152, 1939 (b).
Dunworth, J. V., Rev. Sci. Instr. **11**, 167, 1940.
Ehmert, A., und A. Trost, Zeitschr. f. Phys. **100**, 553, 1936.
Feather, N., Proc. Cambr. Phil. Soc. **36**, 224, 1940.
Feather, N., und J. V. Dunworth, Proc. Cambr. Phil. Soc. **34**, 435, 442, 1938; Proc. Roy. Soc. London (A) **168**, 566, 1938.
Flammersfeld, A., Naturwiss. **24**, 522, 1936; Diss. Berlin 1938.
Fleischmann, R., Zeitschr. f. Phys. **103**, 113, 1936.
Forsman, K. E., Physik. Zeitschr. **39**, 410, 1938.
Geiger, H., und W. Müller, Naturwiss. **28**, 617, 1928; Physik. Zeitschr. **29**, 839, 1928; **30**, 489, 523, 1929.
Gentner, W., Physik. Zeitschr. **38**, 836, 1937.
Getting, L. A., Phys. Rev. **53**, 103, 1938.
Goos, F., und D. Ehmann, Physik. Zeitschr. **41**, 107, 1940.
Greiner, E., Zeitschr. f. Phys. **81**, 453, 1933.
Herzog, G., und P. Weber, Helv. Phys. Acta **10**, 422, 1937.
Herzog, G., Rev. Sci. Instr. **11**, 84, 1940.
Hilgert, R., Zeitschr. f. Phys. **93**, 589, 1935.
Jakobsen, J. C., Nature **138**, 25, 1936.
Janossy, L., Zeitschr. f. Phys. **104**, 68, 1936.
Johnson, T. H., und E. C. Stevenson, Phys. Rev. **43**, 583, 1933.
Joliot, F., und J. Zlotowsky, C. R. **206**, 750, 1938.
Jorgensen, D. L., Rev. Sci. Instr. **10**, 34, 1939.
Kennedy, J. W., G. T. Seaborg und E. Segrè, Phys. Rev. **56**, 1095, 1939.
Kikuchi, S., K. Husimi und H. Aoki, Nature **137**, 30, 136, 992, 1936.
Klarmann, H., und W. Bothe, Zeitschr. f. Phys. **101**, 489, 1936.
Klemperer, O., Zeitschr. f. Phys. **51**, 341, 1928.
Klemperer, O., Proc. Roy. Soc. London (A) **148**, 638, 1935.
Klemperer, O., Proc. Cambr. Phil. Soc. **30**, 347, 1934.
Kovarik, A. F., siehe Handbuch der Experimentalphysik XV, S. 28, 1928.
Langer, L. M., A. C. G. Mitchell und P. W. Daniel, Phys. Rev. **56**, 92, 1939.
Lewis, W. B., Proc. Cambr. Phil. Soc. **33**, 549, 1937.
Libby, W. F., Phys. Rev. **46**, 196, 1934; **55**, 245, 1939.
Lifschutz, H., und O. S. Duffendack, Phys. Rev. **54**, 714, 1938.
Lifschutz, H., und J. L. Lawson, Rev. Sci. Instr. **9**, 83, 1938.
Linke, F., Meteorol. Zeitschr. **11**, 157, 510, 1916.
Locher, G. L., Phys. Rev. **55**, 675, 1939.
Maier-Leibnitz, H., Zeitschr. f. Phys. **101**, 478, 1936.
McMaster, H., und M. L. Pool, Rev. Sci. Instr. **11**, 196, 1940.
Medicus, G., Zeitschr. f. Phys. **74**, 350, 1932.
Medicus, G., Zeitschr. f. techn. Phys. **14**, 304, 1933.
Milatz, J. M. W., und H. ten Kate, Physica **7**, 779, 1940.
Montgomery, C. S., W. E. Ramsey, D. B. Cowie und D. D. Montgomery, Phys. Rev. **56**, 635, 1939.
Montgomery, C. S., und D. D. Montgomery, Phys. Rev. **57**, 1030, 1040; **59**, 1045, 1941 (a).
Montgomery, C. S., und D. D. Montgomery, Journ. Franklin Inst. **231**, 447, 509, 1941.
Neher, H. V., Rev. Sci. Instr. **10**, 29, 1939.
Neher, H. V., und W. W. Harper, Phys. Rev. **49**, 940, 1936.
Neher, H. V., und W. H. Pickering, Phys. Rev. **53**, 316, 1938.
Norling, F., Zeitschr. f. Phys. **111**, 478, 1936.
Norling, F., Ark. Mat. Astron. Fysik **27A**, Nr. 27, 1941.
Ramsey, W. E., Phys. Rev. **57**, 1022, 1940.
Ramsey, W. E., Phys. Rev. **58**, 476, 1940.
Reich, H. J., Rev. Sci. Instr. **9**, 222, 1938.
Rose, M. E., und W. E. Ramsey, Phys. Rev. **59**, 616, 1941.
Rose, M. E., Phys. Rev. **53**, 845, 1938.
Rossi, B., Nature **125**, 636, 1930.
Rossi, B., Cim. (N. S.) **8**, 39, 1931.
Rotblat, J., Proc. Roy. Soc. London (A) **177**, 260, 1940.
Ruark, A. E., und F. E. Brammer, Phys. Rev. **52**, 322, 1937.
Schopper, E., Zeitschr. f. Phys. **93**, 6, 1935.
Schwinger, J., und E. Teller, Phys. Rev. **52**, 286, 1937.
Shankland, R. S., Phys. Rev. **49**, 8, 1936.
Shankland, R. S., Phys. Rev. **50**, 571, 1936; **52**, 414, 1937.
Sizoo, G. J., und H. Willemsen, Physica **5**, 105, 1938.
Skinner, Phys. Rev. **48**, 438, 1935.

Stevenson, E. C., und J. A. Getting, Rev. Sci. Instr. **8**, 414, 1937.
Street, J. C., und R. H. Woodward, Phys. Rev. **46**, 1029, 1934.
Teichmann, H., Physik. Zeitschr. **35**, 299, 1934.
Toomin, H., Rev. Sci. Instr. **10**, 191, 1939
Trost, A., Zeitschr. f. Phys. **105**, 399, 1937.
Tuwim, Berliner Ber. **19**, 33, 1931.
Volz, Zeitschr. f. Phys. **93**, 539, 1935.
Vries, J. de, und G. J. Sizoo, Physica **7**, 593, 1939.
Weber, E., Physik. Zeitschr. **41**, 242, 338, 1940.
Weiß, P., Physik. Zeitschr. **40**, 34, 1939.
Werner, S., Zeitschr. f. Phys. **90**, 384, 1934; **92**, 705, 1934.
Williams, E. J., und F. R. Terroux, Proc. Roy. Soc. London (A) **126**, 289, 1930.
Wynn-Williams, C. E., Proc. Roy. Soc. London (A) **192**, 295, 1931; **136**, 312, 1932.
Yukawa, H., und S. Sakata, Sci. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. Tokyo **31**, 187, 1937.
Zinn, W. H., S. Sealy und V. W. Cohen, Phys. Rev. **56**, 260, 1939.

Heidelberg, Institut für Physik am Kaiser-Wilhelm-Institut für medizinische Forschung, Mai 1942.

(Eingegangen 4. Juni 1942)

ABHANDLUNGEN

Über die Wechselwirkung von drei Spektraltermen

Von I. Kovács und S. Singer

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Kgl. Ung. Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften in Budapest)

Zusammenfassung

Bei Störungsproblemen, die auf Säkulargleichungen dritten Grades führen, wurden bisher meistens „ad hoc"-Näherungsverfahren angewendet. Dabei wird die Lösung der Gleichung dritten Grades dadurch umgangen, daß infolge mehr oder weniger berechtigter Vernachlässigungen eine Reduktion auf eine Gleichung zweiten Grades vorgenommen wird. Vorliegende Arbeit gibt die Lösungen der allgemeinen Säkulargleichung dritten Grades in Reihenform an. Die Konvergenz der Reihen wird bewiesen.

Als Spezialfall ergibt sich die Triplettbandentermformel. Die Anwendung auf drei sich gegenseitig störende Molekülzustände zeigt, daß der Verlauf der gestörten Terme durch die allgemeine Formel in allen Wechselwirkungsbereichen richtig wiedergegeben wird, was die bisherigen Näherungsformeln nicht leisten konnten. Die Überlegenheit an Genauigkeit für die neue Lösung wird an einem wirklichen Verhältnissen entsprechenden Zahlenbeispiel graphisch dargestellt.

Einleitung

Das Problem der Wechselwirkung von n Energieniveaus führt bekanntlich auf eine Säkulargleichung n-ten Grades. Ist sie vom zweiten Grade, kann man die exakte Lösung in geschlossener und übersichtlicher Form angeben; ist sie aber von drittem Grade, so haben wir, weil sämtliche Wurzeln einer Säkulargleichung nur reell sein dürfen, den „casus irreducibilis". Da die Determinantenelemente selbst Funktionen sein können, begnügte man sich in diesem Falle mit Näherungslösungen, um für die weiteren Rechnungen brauchbare Formeln zu erhalten. Diese Näherungslösungen waren aber in der Regel dem betreffenden Problem angepaßte „ad hoc"-Lösungen, weshalb ihre Anwendung nur auf solche oder ähnliche Fälle, für die sie geschaffen worden sind, möglich war. Ferner hatte die Mehrzahl der Lösungen den Nachteil, daß infolge der geschlossenen Form der Formel ihre Genauigkeit nicht gesteigert werden konnte.

Es ist also wünschenswert, die Lösung der Säkulargleichung (dritten Grades) in einer solchen allgemeinen Form anzugeben, die einmal nicht von der speziellen Natur der behandelten Probleme abhängt und für die außerdem die Genauigkeit beliebig gesteigert, d. h. die exakte Lösung beliebig angenähert werden kann.

Allgemeine Lösung

Zur Lösung der Säkulargleichung

$$\begin{vmatrix} W_1 - W & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & W_2 - W & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & W_3 - W \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

— wo $H_{ik} = H_{ki}^*$ ist — müssen wir erst auf die Normalform der Gleichung dritten Grades zurückgehen. Um dies möglichst einfach durchzuführen, setzen wir

$$W = w + \frac{W_1 + W_2 + W_3}{3}. \qquad (2)$$

Damit sind zwei Vorteile erreicht: Es treten schon in der Säkulardeterminante nur Differenzen der ungestörten Terme auf und in der entwickelten Gleichung ist das quadratische Glied in bekannter Weise wegtransformiert.

So erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}(W_{12}+W_{13})-w & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & \frac{1}{3}(W_{23}+W_{21})-w & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & \frac{1}{3}(W_{31}+W_{32})-w \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

wo

$$W_{ik} = W_i - W_k \tag{4}$$

ist.

Nach Entwicklung und einfachen Umformungen:

$$w^3 - aw + b = 0, \tag{5}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{6}(W_{12}^2+W_{23}^2+W_{31}^2)+|H_{12}|^2+|H_{23}|^2+|H_{31}|^2 \\ b &= \frac{1}{3}\left\{\left[\left(\frac{W_{12}}{3}\right)^2+|H_{12}|^2\right](W_{31}+W_{32})+\left[\left(\frac{W_{23}}{3}\right)^2+|H_{23}|^2\right](W_{12}+W_{13})\right. \\ &\qquad \left.+\left[\left(\frac{W_{31}}{3}\right)^2+|H_{31}|^2\right](W_{23}+W_{21})-6\,\Re(H_{12}H_{23}H_{31})\right\} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ist und $\Re(H_{12}H_{23}H_{31})$ den reellen Teil von $H_{12}H_{23}H_{31}$ bedeutet.

Wir lösen Gleichung (5) mittels der wohlbekannten Reihenentwicklungsmethode[1]. Wir setzen:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n y^n, \quad a = a_0 + a_1 y, \quad b = b_0 + b_1 y, \tag{7}$$

wo, mit Rücksicht auf das Folgende,

$$a_1 = b_0 = 0 \tag{8}$$

gesetzt werden soll. So wird aus Gleichung (5):

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' \left[\sum_{k=0}^{n}{}' \sum_{l=0}^{n-k}{}' w_{n-(k+l)} w_k w_l - a_0 w_n\right] y^n + b_1 y = 0. \tag{9}$$

Daraus wird durch Nullsetzen der Koeffizienten der Potenzen von y die folgende Rekursion erhalten:

$$\left.\begin{aligned} & w_0^3 - a_0 w_0 = 0 \\ & w_1(3w_0^2 - a_0) + b_1 = 0 \\ & \vdots \\ & w_n(3w_0^2 - a_0) + \sum_{k=0}^{n-1}{}' \sum_{l=0}^{n-k-\delta_{0k}}{}' w_{n-(k+l)} w_k w_l = 0, \\ & \vdots \\ & n > 1 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Hier dürfen k und l nicht gleichzeitig 0 sein und

$$\delta_{0k} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } k \neq 0, \\ 1, & \text{wenn } k = 0, \end{cases} \text{ ist.}$$

Aus Gleichung (10) werden folgende Lösungen sukzessive erhalten (siehe Anhang):

$$\left.\begin{aligned} w_{0,1} &= -a_0^{\frac{1}{2}} & ; \quad w_{0,2} &= 0 & ; \\ w_{1,1} &= -\frac{b_1}{2a_0} & ; \quad w_{1,2} &= \frac{b_1}{a_0} & ; \\ &\vdots & & \vdots & \\ w_{n,1} &= (-1)^n \frac{3}{2n}\binom{\frac{3}{2}n-\frac{5}{2}}{n-1} \frac{b_1^n}{a_0^{\frac{1}{2}(3n-1)}} & ; \quad w_{n,2} &= \left[1-(-1)^n\right] \frac{3}{2n}\binom{\frac{3}{2}n-\frac{5}{2}}{n-1} \frac{b_1^n}{a_0^{\frac{1}{2}(3n-1)}} & ; \\ &\vdots & & \vdots & \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} w_{0,3} &= a_0^{\frac{1}{2}} \\ w_{1,3} &= -\frac{b_1}{2a_0} \\ &\vdots \\ w_{n,3} &= -\frac{3}{2n}\binom{\frac{3}{2}n-\frac{5}{2}}{n-1} \frac{b_1^n}{a_0^{\frac{1}{2}(3n-1)}}, \\ &\vdots \\ & n > 1. \end{aligned}\right\}$$

1) Vgl. z. B. W. H. Brandt, Phys. Rev. **50**, 778, 1936.

Wegen $a_0 = a$, $b_1 = \frac{b}{y}$ erhält man unabhängig von der Wahl von y für die Wurzeln:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= -\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}} = -\frac{b}{2a} + \sum_{n=2}^{\infty}{}' (-1)^n \frac{3}{2n}\binom{\frac{3}{2}n - \frac{5}{2}}{n-1}\frac{b^n}{a^{\frac{1}{2}(3n-1)}} \\ w_2 &= \frac{b}{a} + \sum_{n=2}^{\infty}{}' \left[1 - (-1)^n\right]\frac{3}{2n}\binom{\frac{3}{2}n - \frac{5}{2}}{n-1}\frac{b^n}{a^{\frac{1}{2}(3n-1)}} \\ w_3 &= a^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{2a} - \sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{3}{2n}\binom{\frac{3}{2}n - \frac{5}{2}}{n-1}\frac{b^n}{a^{\frac{1}{2}(3n-1)}}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die Konvergenz der Reihen (12) kann bewiesen werden, wenn man unter Benutzung von $\binom{i}{k} = \frac{i!}{k!\,(i-k)!}$ und der Stirlingschen Formel, ferner der Beziehung $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ asymptotische Formeln für die w_n für große n aufstellt. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned} w_{n,1} &\sim \frac{(-1)^n}{3}\sqrt{\frac{a}{2\pi}}\frac{1}{n^{3/2}}\left(\frac{3^{3/2}}{2}\frac{b}{a^{3/2}}\right)^n \\ w_{n,2} &\sim \frac{1-(-1)^n}{3}\sqrt{\frac{a}{2\pi}}\frac{1}{n^{3/2}}\left(\frac{3^{3/2}}{2}\frac{b}{a^{3/2}}\right)^n \\ w_{n,3} &\sim -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{2\pi}}\frac{1}{n^{3/2}}\left(\frac{3^{3/2}}{2}\frac{b}{a^{3/2}}\right)^n. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Wir sehen daraus, daß die Reihen (12) dann und nur dann konvergent sind, wenn

$$\left|\frac{3^{3/2}}{2}\frac{b}{a^{3/2}}\right| \leq 1. \tag{14}$$

Im Falle einer Säkulargleichung wird die Bedingung (14) stets erfüllt, da Gleichung (14) identisch mit $\frac{b^2}{4} + \frac{(-a)^3}{27} \leq 0$ ist — bekanntlich die Bedingung dafür, daß eine Gleichung dritten Grades mit reellen Koeffizienten nur reelle Wurzeln besitzen soll —[2]).

Die Reihen (12) sind also für eine Säkulargleichung immer konvergent.

Behält man die ersten zwei Glieder von Gleichung (12) bei und benutzt Gleichungen (6) und (2), dann folgt die Näherungslösung von Gleichung (1):

$$\left.\begin{aligned} W_1'' &= \frac{1}{3}\sum_i{}' W_i - \sqrt{\sum_{i,k}{}'\left[\frac{W_{ik}^2}{6} + |H_{ik}|^2\right]} - \frac{\frac{1}{6}\sum_{i,k,l}{}'\left\{\left[\left(\frac{W_{ik}}{3}\right)^2 + |H_{ik}|^2\right](W_{li} + W_{lk}) - 2\Re\left(H_{ik}H_{kl}H_{li}\right)\right\}}{\sum_{i,k}{}'\left[\frac{W_{ik}^2}{6} + |H_{ik}|^2\right]} \\ W_2'' &= \frac{1}{3}\sum_i{}' W_i + \frac{\frac{1}{3}\sum_{i,k,l}{}'\left\{\left[\left(\frac{W_{ik}}{3}\right)^2 + |H_{ik}|^2\right](W_{li} + W_{lk}) - 2\Re\left(H_{ik}H_{kl}H_{li}\right)\right\}}{\sum_{i,k}{}'\left[\frac{W_{ik}^2}{6} + |H_{ik}|^2\right]} \\ W_3'' &= \frac{1}{3}\sum_i{}' W_i + \sqrt{\sum_{i,k}{}'\left[\frac{W_{ik}^2}{6} + |H_{ik}|^2\right]} - \frac{\frac{1}{6}\sum_{i,k,l}{}'\left\{\left[\left(\frac{W_{ik}}{3}\right)^2 + |H_{ik}|^2\right](W_{li} + W_{lk}) - 2\Re\left(H_{ik}H_{kl}H_{li}\right)\right\}}{\sum_{i,k}{}'\left[\frac{W_{ik}^2}{6} + |H_{ik}|^2\right]} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

wo $(i, k, l) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ ist.

Diese allgemeinen Formeln sind von der speziellen Natur der zu behandelnden Probleme unabhängig, was nicht nur aus der Ableitung, sondern auch aus dem symmetrischen Vorkommen der einzelnen Determinantenelemente in den Formeln ersichtlich ist. Keine der Wechselwirkungen wurde nämlich ausgezeichnet. Die Genauigkeit ist beliebig zu erhöhen durch Heranziehung weiterer Glieder. Wenn wir Gleichung (15) tatsächlich mit neuen Gliedern ergänzen wollen, brauchen wir keine neuen Ausdrücke auszurechnen: in der Weiterführung kommen im Zähler und Nenner dieselben Ausdrücke wie im letzten Glied der Formel (15) vor, nur mit anderen Exponenten und numerischen Faktoren. Daß Gleichung (15) zu allgemeinen Folgerungen geeignet ist, sieht man auch daraus,

[2]) $\frac{b^2}{4} + \frac{(-a)^3}{27} = 0$ entspricht dem Fall von vielfachen Wurzeln, was bei tatsächlichen Störungen nie vorkommen kann.

daß – natürlich infolge der Art der Ableitung – im wesentlichen nur Termdifferenzen vorkommen, was der physikalischen Realität gut entspricht.

Anwendungen

Wir illustrieren die Anwendbarkeit von Gleichung (15) an zwei bandenspektroskopischen Beispielen, wo die drei ungestörten Terme und die Matrixelemente Funktionen der Rotationsquantenzahl J sind.

Als erstes Beispiel, an dem die Nachteile der bisher angewandten Verfahren sich gut demonstrieren lassen, betrachten wir den Fall, wo zwei Terme „verwandt" (d. h. Komponenten desselben Multiplett-Termes) sind; sie liegen daher nahe beieinander, der dritte verläuft dagegen beliebig. Dieses Problem tritt z. B. bei $^1\Pi - {}^3\Sigma^+$-Störungen[3]) zwischen Komponenten von derselben Symmetrie auf (siehe Fig. 1).

Um die Wechselwirkung (W_2, W_3) auszuzeichnen, wurde Gleichung (1) bisher auf folgende Form transformiert[3]):

$$D(W) \equiv \begin{vmatrix} W_1' - W & H_{12}' & H_{13}' \\ H_{21}' & W_2' - W & 0 \\ H_{31}' & 0 & W_3' - W \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

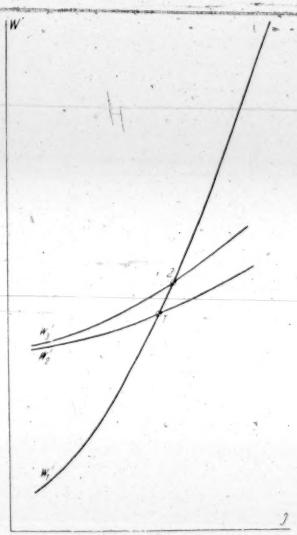

Fig. 1. Verlauf der ungestörten Terme, wenn es nur zwei Überschneidungspunkte gibt.

Hier ist:

$$\left.\begin{aligned} W_1 = W_1; \quad \frac{W_2'}{W_3'} = \frac{W_2' + W_3'}{2} \mp \Delta_{23}; \quad H_{12}' = S_{22} H_{12} + S_{23} H_{13}; \quad H_{13}' = S_{32} H_{12} + S_{33} H_{13}; \\ \Delta_{23} = \sqrt{\left(\frac{W_{23}}{2}\right)^2 + |H_{23}|^2}; \qquad S_{22} = S_{33} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \left|\frac{H_{23}}{\Delta_{23}}\right|^2}\right]}; \\ S_{32} = -S_{23} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \left|\frac{H_{23}}{\Delta_{23}}\right|^2}\right]}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Bei Vernachlässigung von H_{13}' in der Umgebung der (W_1', W_2')-Überschneidung bzw. von H_{12}' in der Umgebung der (W_1', W_3')-Überschneidung erhielt man zwei Gleichungen zweiten Grades, deren Lösungen die gestörten Terme in erster Näherung in der Nähe der ersten bzw. zweiten Überschneidung darstellen:

$$\left.\begin{matrix} W_i'' \\ W_k'' \end{matrix}\right\} = \frac{W_i' + W_k'}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{W_{ik}'}{2}\right)^2 + |H_{ik}'|^2}, \quad (18)$$

wo $(i, k) = (1, 2)$ bzw. $(3, 1)$ ist.

Diese verhältnismäßig einfachen Lösungen geben aber nicht an jeder Stelle eine gute Näherung. Ferner ist, wenn die beiden Überschneidungen nahe beieinander liegen, Ausdruck (18) im Zwischengebiet überhaupt nicht zu gebrauchen, weil die Vernachlässigungen, auf Grund deren er abgeleitet wurde, dort nicht erlaubt sind.

Der Verlauf der Terme W_i'' wurde in der Fig. 2 gemäß der Formel (18) schematisch dargestellt.

Wir sehen, daß die Kurven W_2'' und W_3'' sich nicht einmal zu einer einzigen Kurve ergänzen. Das ist in Einklang mit unserer obigen Bemerkung betreffend das Zwischengebiet.

3) A. Budó und I. Kovács, Zeitschr. f. Phys. **109**, 393, 1938. Weitere Beispiele sind: $^2\Sigma^+ - {}^2\Pi$: G. P. Ittmann, ebenda **71**, 616, 1931; $^1\Sigma^+ - {}^3\Sigma^+$: A. Budó und I. Kovács, ebenda **111**, 633, 1939; $^3\Sigma^+ - {}^3\Sigma^+$: I. Kovács, ebenda **111**, 640, 1939.

Man könnte eine bessere Näherung erreichen, wenn alle Matrixelemente beibehalten wurden, dagegen näherungsweise

$$W_3'-W\sim W_3'-W_1' \text{ bei Überschneidung } (W_1', W_2'),$$
$$W_2'-W\sim W_2'-W_1' \text{ bei Überschneidung } (W_1', W_3')$$

gesetzt wurde[4]).

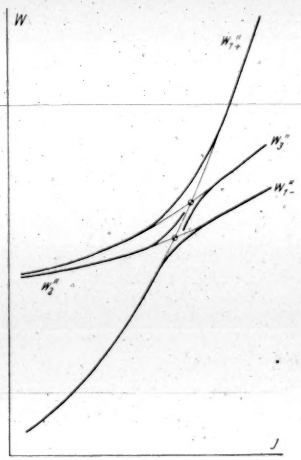

Fig. 2. Termverlauf gemäß Formel (18). W_{1+}'' bzw. W_{1-}'' entspricht W_1'' der Formel (18) berechnet mit + - bzw. — -Zeichen.

Diese Methode kann weiter verfeinert werden, indem man W durch denjenigen W_i'-Wert ersetzt[5]), von dem wir schon vorher wissen, daß er am nächsten zu dem gesuchten W-Wert liegt. Die Ersetzung ist also verschieden vor und nach einer Überschneidung vorzunehmen.

So erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} W_i'' \\ W_k'' \end{aligned}\right\} = \frac{W_i'+W_k'}{2} - \frac{|H_{il}'|^2}{2\,W_{lr}'} \mp \sqrt{\left[\frac{W_{ki}'}{2}+\frac{|H_{il}'|^2}{2\,W_{lr}'}\right]^2+|H_{ik}'|^2}, \tag{19}$$

wenn $(i, k, l) = (1, 2, 3)$ ist. Ist $(i, k, l) = (1, 3, 2)$, so müssen die Vorzeichen $\pm$ durch $\mp$ ersetzt werden. Je nachdem der gestörte Term näher zu W_i' bzw. W_k' liegt, wird $r = i$ bzw. k gesetzt.

Dieses Verfahren ist mit zwei Nachteilen behaftet: einerseits liefert es acht Formeln, von denen man in verschiedenen Gebieten der Störung je drei auszuwählen hat, anderseits ist zu dieser Auswahl die vorherige Kenntnis des Termverlaufes nötig, was eigentlich ein Resultat der Lösung von Gleichung (16) sein sollte. Wenn durchwegs $r = i$ gesetzt wird, ergeben sich zwar nur vier Formeln, doch sind sie weniger gut anwendbar als Formel (19), weil sie gewisse Singularitäten (Pole) aufweisen, wodurch die Genauigkeit auch in verhältnismäßig großer Entfernung von den singulären Stellen vermindert wird.

Weiter kann man versuchen, Gleichung (16) mittels der wohlbekannten Newton-Fourierschen Methode zur Lösung algebraischer Gleichungen zu behandeln, allerdings mit der Abänderung, daß als Ersatzkurve für die $D(W)$, statt einer Tangente, für jede Wurzel eine oskulierende Parabel mit dem Berührungspunkt $(W_i', D(W_i'))$ gewählt wird. Die Ersetzung von $D(W)$ durch die Tangente würde gerade zu der Schrödingerschen Störungsformel zweiter Ordnung führen, die bekanntlich in der Nähe von Überschneidungen versagt.

So erhält man die Formel:

$$\left.\begin{aligned} W_i'' \\ W_k'' \end{aligned}\right\} = W_i' + \frac{W_{ki}'W_{li}' - |H_{ik}'|^2 - |H_{kl}'|^2 - |H_{li}'|^2}{2\,(W_{ki}'+W_{li}')} \mp \sqrt{\left[\frac{W_{ki}'W_{li}' - |H_{ik}'|^2 - |H_{kl}'|^2 - |H_{li}'|^2}{2\,(W_{ki}'+W_{li}')}\right]^2 + \frac{|H_{ik}'|^2 W_{li}' + |H_{il}'|^2 W_{ki}'}{W_{ki}'+W_{li}'}}, \tag{20}$$

wo $(i, k, l) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ ist.

Natürlich ist in Formel (20) infolge der Form von Gleichung (16) $H_{23}' = 0$.

Ausdruck (20) weist im wesentlichen dieselbe Struktur wie Lösung (19) auf. Sein größter Nachteil ist, daß man aus den sechs Wurzeln die drei zu benutzenden auswählen muß und daß diese Wahl selbst von J abhängig ist (unter anderem ändert sie sich beim Überschreiten von Termüberschneidungspunkten). Außerdem liefert Formel (20) keine höhere Genauigkeit als Ausdruck (19).

4) B. I. Stepanov, Journ. of Phys. USSR. **2** (1), 89, 1940.

5) An derselben Stelle der Determinante, wie Stepanov, l. c.

Gewinnen wir dagegen die Wurzeln von Gleichung (16) mit den in dieser Arbeit abgeleiteten Formeln (15), so folgt:

$$\left.\begin{aligned}
W_1'' &= \frac{W_1'+W_2'+W_3'}{3} - \sqrt{\frac{W_{12}'^2}{6}+|H_{12}'|^2+\frac{W_{23}'^2}{6}+\frac{W_{31}'^2}{6}+|H_{31}'|^2} \\
&\quad - \frac{\left[\left(\frac{W_{12}'}{3}\right)^2+|H_{12}'|^2\right](W_{31}'+W_{32}')+\left(\frac{W_{23}'}{3}\right)^2(W_{12}'+W_{13}')+\left[\left(\frac{W_{31}'}{3}\right)^2+|H_{31}'|^2\right](W_{21}'+W_{23}')}{6\left[\frac{W_{12}'^2}{6}+|H_{12}'|^2+\frac{W_{23}'^2}{6}+\frac{W_{31}'^2}{6}+|H_{31}'|^2\right]} \\
W_2'' &= \frac{W_1'+W_2'+W_3'}{3} \\
&\quad + \frac{\left[\left(\frac{W_{12}'}{3}\right)^2+|H_{12}'|^2\right](W_{31}'+W_{32}')+\left(\frac{W_{23}'}{3}\right)^2(W_{12}'+W_{13}')+\left[\left(\frac{W_{31}'}{3}\right)^2+|H_{31}'|^2\right](W_{21}'+W_{23}')}{3\left[\frac{W_{12}'^2}{6}+|H_{12}'|^2+\frac{W_{23}'^2}{6}+\frac{W_{31}'^2}{6}+|H_{31}'|^2\right]} \\
W_3'' &= \frac{W_1'+W_2'+W_3'}{3} + \sqrt{\frac{W_{12}'^2}{6}+|H_{12}'|^2+\frac{W_{23}'^2}{6}+\frac{W_{31}'^2}{6}+|H_{31}'|^2} \\
&\quad - \frac{\left[\left(\frac{W_{12}'}{3}\right)^2+|H_{12}'|^2\right](W_{31}'+W_{32}')+\left(\frac{W_{23}'}{3}\right)^2(W_{12}'+W_{13}')+\left[\left(\frac{W_{31}'}{3}\right)^2+|H_{31}'|^2\right](W_{21}'+W_{23}')}{6\left[\frac{W_{12}'^2}{6}+|H_{12}'|^2+\frac{W_{23}'^2}{6}+\frac{W_{31}'^2}{6}+|H_{31}'|^2\right]}
\end{aligned}\right\} \quad (21)^{6}$$

In Lösung (21) entspricht jedem Zweig eine einzige Formel, so daß man den Verlauf der gestörten Terme nicht vorher zu kennen braucht. Daß hier die gestörten Terme richtig zu den ungestörten zugeordnet werden, erkennt man wie folgt:

Weit links von der ersten Überschneidung können wir

$$\left.\begin{aligned}
&|W_{13}'| \sim |W_{12}'| \gg |W_{23}'| \sim 0 \\
&|H_{12}'|^2 \sim |H_{31}'|^2 \ll |W_{13}'|^2 \sim |W_{12}'|^2
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

setzen. Wenn noch im Wurzelausdruck $\frac{81}{25}$ statt 3 geschrieben wird, erhalten wir an der betrachteten Stelle:

$$\left.\begin{aligned}
W_1'' &\sim \frac{W_1'+2W_3'}{3} - \sqrt{\frac{(W_3'-W_1')^2}{\frac{81}{25}}} - \frac{(W_3'-W_1')}{9} = W_1' \\
W_2'' &\sim \frac{W_1'+2W_3'}{3} + \frac{2(W_3'-W_1')}{9} = W_3' + \frac{W_1'-W_3'}{9} \sim W_3' \\
W_3' &\sim \frac{W_1'+2W_3'}{3} + \sqrt{\frac{(W_3'-W_1')^2}{\frac{81}{25}}} - \frac{W_3'-W_1'}{9} = W_3' - \frac{W_1'-W_3'}{9} \sim W_3'.
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

(Da $W_2' \sim W_3'$ gesetzt wurde, haben wir natürlich für W_2'' und W_3'' denselben Näherungswert erhalten.)

Ähnlicherweise gelangt man weit rechts von der zweiten Überschneidung zu

$$W_1'' \sim W_3'; \quad W_2'' \sim W_3'; \quad W_3'' \sim W_1'. \quad (24)$$

In dieser Weise verlaufen die Terme so, wie es in Fig. 3 dargestellt wurde, also den wirklichen Verhältnissen entsprechend.

Wir vergleichen die Brauchbarkeit der Formeln (18), (19), (20) und (21) an einem Zahlenbeispiel. Wir haben eine fiktive $^1\Pi - {}^3\Sigma^-$-Störung

6) Die in der Form von (21) auftretende Asymmetrie ist nur eine scheinbare, was sofort erhellt, wenn man (17) in (21) einsetzt, wodurch (15) erhalten wird. Da die in (21) vorkommenden W_{ik}' (gestrichelte Energiedifferenzen) allein physikalische Bedeutung besitzen, haben wir die allgemeine Lösung anstatt unmittelbar auf (1), auf die transformierte Form derselben (16) angewendet.

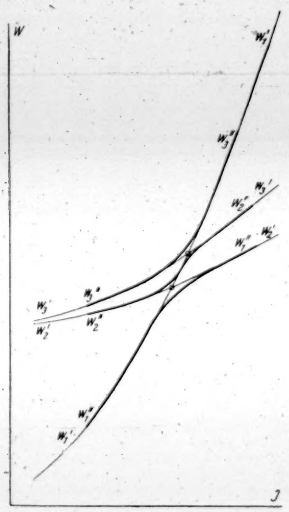

Fig. 3. Termverlauf gemäß Formel (15).

konstruiert, deren Zahlendaten, obzwar einigermaßen abgerundet, denen einer tatsächlichen $^3\Sigma$-Störung am CO $A\,^1\Pi$, $v=0$ Niveau sehr nahe kommen. Die Terme und Wechselwirkungen sind die folgenden[7]):

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= B_{1_\Pi}[J(J+1)-1] \\ W_2 &= h\nu(^1\Pi;{}^3\Sigma)+B_{3_\Sigma}J(J+1)+2\varepsilon \\ W_3 &= h\nu(^1\Pi;{}^3\Sigma)+B_{3_\Sigma}[J(J+1)+2]-4\varepsilon \\ H_{12} &= H_{21}=\eta\sqrt{2}\,J(J+1) \\ H_{23} &= H_{32}=2\,B_{3_\Sigma}\sqrt{J(J+1)} \\ H_{31} &= H_{13}=\xi \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

mit den Zahlenwerten:

$$\begin{aligned} h\nu(^1\Pi;{}^3\Sigma) &= 50\,\mathrm{cm}^{-1}; & B_{1_\Pi} &= 1{,}6\,\mathrm{cm}^{-1}; \\ B_{3_\Sigma} &= 1{,}3\,\mathrm{cm}^{-1}; & \eta &= 1{,}5\,\mathrm{cm}^{-1}; \\ \xi &= 9\,\mathrm{cm}^{-1}; & \varepsilon &= 0\,. \end{aligned}$$

Mit diesen Daten haben wir mittels Gleichung (17) die Säkulargleichung (16) aufgestellt und bei einigen J numerisch gelöst. Für dieselben J haben wir die Terme unter Benutzung der Formeln (18), (19), (20) und (21) berechnet. Bei Anwendung von Lösung (21) haben wir nicht nur die in (21) explizit gegebenen Glieder berücksichtigt, sondern auch zwei weitere Glieder, die auf Grund von Ausdruck (12) leicht auszurechnen sind. Das Resultat ist in der Fig. 4 dargestellt. Hier geben wir die Abweichungen der durch jede Formel gelieferten Terme von den exakten Werten an.

Das zweite Beispiel sei der Fall, wo die drei Terme drei Komponenten eines Tripletts sind (siehe Fig. 5).

Hier ist die wohlbekannte Schrödingersche Störungsformel infolge der engen Nachbarschaft der Terme nicht anwendbar[8]). Die Lösung des Störungsproblems führt auf die Säkulargleichung (1) mit folgenden Determinantenelementen[9]):

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= B[J(J+1)-\Lambda^2+\Lambda(Y-2)] \\ W_2 &= B[J(J+1)-\Lambda^2+2] \\ W_3 &= B[J(J+1)-\Lambda^2-\Lambda(Y-2)] \\ H_{12} &= H_{21}=B\sqrt{2}\,[J(J+1)-\Lambda(\Lambda+1)] \\ H_{23} &= H_{32}=B\sqrt{2}\,[J(J+1)-\Lambda(\Lambda-1)] \\ H_{31} &= H_{13}=0\,, \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

wo B die Rotationskonstante, $YB=A$ die Spin-Bahn-Koppelungskonstante bedeutet und $\Lambda=1$ für $^3\Pi$-, $\Lambda=2$ für $^3\Delta$-Terme usw. einzusetzen ist.

Einsetzen in Ausdruck (15) liefert:

$$\left.\begin{aligned} W_1'' &= B\left[-\Lambda^2+\frac{2}{3}+J(J+1)-\sqrt{y_1+4J(J+1)}-\frac{2}{3}\,\frac{y_2-2J(J+1)}{y_1+4J(J+1)}\right] \\ W_2'' &= B\left[-\Lambda^2+\frac{2}{3}+J(J+1)+\frac{4}{3}\,\frac{y_2-2J(J+1)}{y_1+4J(J+1)}\right] \\ W_3'' &= B\left[-\Lambda^2+\frac{2}{3}+J(J+1)+\sqrt{y_1+4J(J+1)}-\frac{2}{3}\,\frac{y_2-2J(J+1)}{y_1+4J(J+1)}\right] \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

wo

$$\begin{aligned} y_1 &= \Lambda^2 Y(Y-4)+\tfrac{4}{3} \\ y_2 &= \Lambda^2 Y(Y-1)-\tfrac{4}{9} \end{aligned}$$ ist.

7) A. Budó und I. Kovács, Zeitschr. f. Phys. **109**, 393, 1938.
8) Abgesehen von gewissen Grenzfällen. Siehe E. L. Hill und J. H. van Vleck, Phys. Rev. **32**, 250, 1928; J. H. van Vleck, Phys. Rev. **33**, 467, 1929.
9) J. H. van Vleck, Phys. Rev. **33**, 467, 1929.

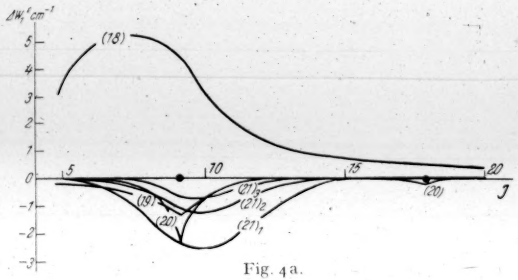

Fig. 4a.

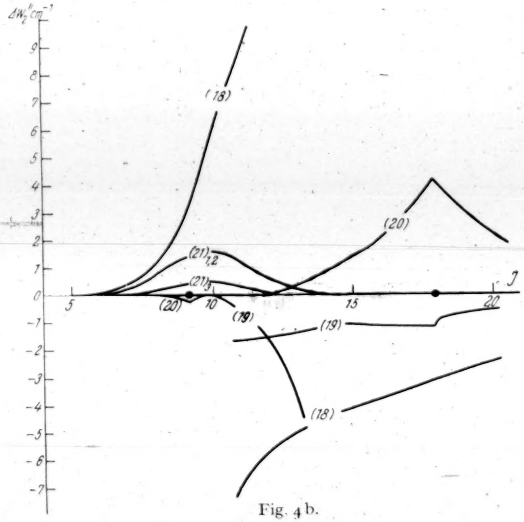

Fig. 4b.

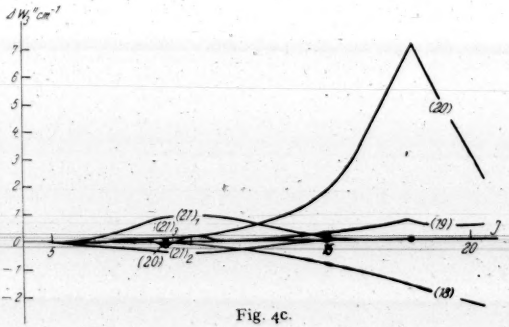

Fig. 4c.

Fig. 4. Fehlerkurven im Störungsbereich ($J \sim 5$ bis 20) für die W_i''. Aufgetragen wurden die aus den Formeln (18), (19), (20), (21) berechneten Werte der Terme vermindert um die exakten Werte derselben als Funktionen von J. Für jede Kurve ist die Nummer der Formel, mit der der entsprechende W_i''-Näherungswert berechnet wurde, angegeben. Dabei bedeuten: $(21)_1$ Formel (21) im Text; $(21)_2$ bzw. $(21)_3$ die (im Text nicht ausgeschriebenen) Formeln, welche entstehen, wenn man Formel (21) mit Heranziehung noch eines bzw. noch zwei weiterer Glieder der Reihen (12) ergänzt. Bei Heranziehung noch weiterer Glieder ergeben sich im betrachteten Störungsgebiet Ordinatenwerte, die bei dem hier gewählten Maßstab schon undarstellbar klein sind. Die Genauigkeitsgrenze bandenspektroskopischer Zahlenangaben übertrifft übrigens schon diese weiteren Näherungswerte. — Außerhalb des Störungsbereiches ist die Konvergenz etwas schlechter, da hier die linke Seite des Ausdrucks (14) näher an 1 herankommt.

Die J-Werte, bei denen die ungestörten Terme Überschneidungen aufweisen, sind mit • bezeichnet.

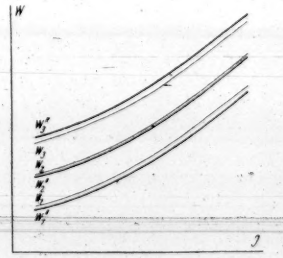

Fig. 5. Verlauf der Terme ohne Überschneidungspunkte.

Dies ist die bekannte Triplettformel[10]). Die aus ihr schon ohne Heranziehung weiterer Glieder berechneten Differenzen stimmen innerhalb der Meßgenauigkeit mit den experimentell festgestellten Kombinationsdifferenzen überein.

Zur Frage der Anwendbarkeit anderer Formeln im Triplettfalle sei bemerkt, daß eine zu Ausdruck (18) analoge Formel hier überhaupt nicht existiert (da keine der Wechselwirkungen ausgezeichnet werden darf). Ausdruck (19) – der in diesem Falle mit seiner urspünglichen Form übereinstimmt – ist zwar formal anwendbar,

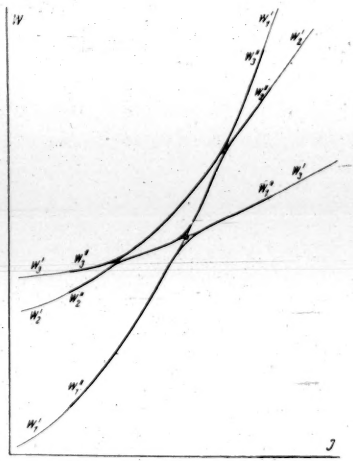

Fig. 6. Verlauf der Terme bei drei Überschneidungspunkten.

aber neben anderen Nachteilen ist die Darstellung der mittleren Triplettkomponente mit ihr bestimmt schlecht, da für sie in jedem Punkte sich zwei Werte ergeben, von denen keiner zu bevorzugen ist. Ausdruck (20) ist mit denselben Nachteilen behaftet wie Lösung (19) und außerdem gibt er eine viel schlechtere Näherung als Lösung (27).

Es steht natürlich nichts im Wege, Formel (15) bzw. (12) in dem Falle zu benutzen, wo alle drei Terme beliebig verlaufen (z. B. bei drei Singulett-Termen oder drei $^2\Sigma$-Termen; siehe Fig. 6).

Der Verlauf der gestörten Terme wird durch Formel (15) auch in diesem Falle richtig wiedergegeben.

10) A. Budó, Zeitschr. f. Phys. **96**, 219, 1935.

Anhang

Man kann die Richtigkeit der Formeln (11) zeigen, indem bewiesen wird, daß die daraus entstehenden Ausdrücke (12) die Wurzeln der Gleichung (5) richtig darstellen. Die rechten Seiten der Gleichung (12) sind aber der Reihe nach identisch mit den Mac-Laurinschen Reihen der Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= k\cos\left(\frac{1}{3}\arccos y\right)\\ x_2 &= -k\cos\left[\frac{1}{3}(\arccos y+\pi)\right]\\ x_1 &= -k\cos\left[\frac{1}{3}(\arccos y-\pi)\right] \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

mit

$$y=-\frac{3^{3/2}}{2}\frac{b}{a^{3/2}}; \qquad k=\frac{2}{3^{1/2}}a^{\frac{1}{2}}, \quad (29)$$

die in der Tat die Lösungen der Gleichung (5) in trigonometrischer Form darstellen.

Um diese Identität einsehen zu können, betrachten wir beispielsweise

$$x_3=k\cos\left(\frac{1}{3}\arccos y\right). \quad (30)$$

Dies kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\arccos\left(\frac{x_3}{k}\right)=\frac{1}{3}\arccos y. \quad (31)$$

Durch Ableitung nach y ergeben sich:

$$9x_3'^2(1-y^2)+x_3^2=k^2 \quad (32)$$

bzw.

$$x_3''(1-y^2)-x_3'y+\frac{1}{9}x_3=0 \quad (33)$$

und durch weiteres n-maliges Ableiten:

$$\left.\begin{aligned} &x_3^{(n+2)}(1-y^2)-(2n+1)yx_3^{(n+1)}\\ &-\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)x_3^{(n)}=0. \end{aligned}\right\} \quad (34)^{11})$$

Wird in Gleichung (30), (32) und (34) $y=0$ gesetzt, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} x_3(0) &= a^{\frac{1}{2}}\\ x_3'(0) &= \frac{a^{\frac{1}{2}}}{3^{1/2}}\\ &\vdots\\ x_3^{(n+2)}(0) &= \left(n+\frac{1}{3}\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)x_3^{(n)}(0), \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

11) Wenn man in der Formel (34) m bzw. $-m$ statt $\frac{1}{3}$ bzw. $-\frac{1}{3}$ schreibt, dann geht sie in die Differentialgleichung n-ter Ordnung des Tschebitscheffschen Polinoms m-ter Ordnung über.

woraus durch sukzessives Einsetzen

$$\left.\begin{aligned} x_3(0) &= a^{\frac{1}{2}} \\ x_3'(0) &= \frac{a^{\frac{1}{2}}}{3^{3/2}} \\ &\vdots \\ x_3^{(n)}(0) &= -(-1)^n (n-1)! \binom{\frac{3}{2}n-\frac{5}{2}}{n-1} \frac{2^{n-1} a^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{3}{2}n-1}}, \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

wo $n > 1$ ist, folgt.

Wenn wir jetzt entsprechend Gleichung (29) das willkürlich wählbare y im Text durch $-\frac{3^{3/2}}{2}\frac{b}{a^{3/2}}$ ersetzen, wodurch $b_1 = -\frac{2\,a^{3/2}}{3^{3/2}}$ wird, erhält man aus Gleichung (11)

$$\left.\begin{aligned} w_{0,3} &= a^{\frac{1}{2}} \\ w_{1,3} &= \frac{a^{\frac{1}{2}}}{3^{3/2}} \\ &\vdots \\ w_{n,3} &= -(-1)^n \frac{1}{n} \binom{\frac{3}{2}n-\frac{5}{2}}{n-1} \frac{2^{n-1} a^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{3}{2}n-1}} \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Aus Gleichung (36) und (37) folgt:

$$w_{n,3} = \frac{x_3^{(n)}(0)}{n!}. \quad (38)$$

Daraus ersieht man sofort, daß die Mac-Laurinsche Reihe von $x_3 = x_3(y)$ die Reihe $w_3 = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n,3} y^n$ ist. – Der Beweis geht ganz analog für x_2 und x_1.

Es ist aus dem Vorhergehenden ersichtlich, daß die Formeln (12) einfach aus der trigonometrischen Lösung ableitbar sind. Der im Text eingeschlagene Weg ist aber unschwer für Gleichungen höheren Grades zu verallgemeinern.

Vorliegende Arbeit ist im Physikalischen Institut der Kgl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften – das einen Teil seiner Ausrüstung dem Naturwissenschaftlichen Forschungsfonds und der Széchenyi-Gesellschaft verdankt – ausgeführt worden.

(Eingegangen 12. April 1942).

BESPRECHUNGEN

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten

E. Kamke, Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen (Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern, Band 18). Gr.-8°. XXVI und 642 S. Mit 60 Figuren. Leipzig 1942. Akademische Verlagsgesellschaft. Geb. RM 37,—.

Als ungefähr vor Jahresfrist die damals fertigen Teile des vorliegenden Buches durch die „Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters" einer verhältnismäßig geringen Anzahl von Interessenten zugänglich gemacht wurden, konnte man wohl kaum erwarten, daß so bald schon eine wesentlich erweiterte und verbesserte Ausgabe im Buchhandel erscheinen würde. Die Verwirklichung dieses Ereignisses wird nunmehr sowohl dem Verfasser als auch dem Verlag die besondere Dankbarkeit weitester Kreise sichern.

Mit erstaunlicher Gründlichkeit und Sorgfalt hat der Verfasser ein äußerst umfangreiches und vielseitiges Material über gewöhnliche Differentialgleichungen verarbeitet, um es – in drei ihrerseits übersichtlich unterteilte Hauptabschnitte gegliedert – der Öffentlichkeit zu unterbreiten. Der erste Abschnitt orientiert über Lösungsmethoden und Lösungseigenschaften allgemeinerer Klassen von Differentialgleichungen; den Gegenstand des zweiten Abschnitts bilden Rand- und Eigenwertaufgaben, während der dritte Abschnitt etwa 1500 spezielle, lexikographisch angeordnete Differentialgleichungen mit ihren nachgeprüften Lösungen sowie Angaben über die Gewinnung der Lösungen enthält. Überall sind ausgiebige Hinweise auf einschlägiges Schrifttum eingestreut, so daß gegebenenfalls der Wunsch nach eingehenderer Beschäftigung mit einer Sonderfrage mühelos erfüllbar ist.

Harry Schmidt

Veröffentlichungen des Geophysikalischen Instituts der Universität Leipzig, II. Serie, Band 12.

Heft 1. J. Bjerknes, P. Mildner, E. Palmén und L. Weickmann. 359 S. Leipzig 1941. Synoptisch-aerologische Untersuchung der Wetterlage während der internationalen Tage vom 13. bis 18. Dezember 1937. RM. 4,50.

Heft 2. G. Tomczak, Verdunstung freier Wasserflächen. RM. 3,30.

Heft 3. W. Oehmisch, Analyse einer 72tägigen Luftdruckwelle in den Wintern 1923/24 und 1924/25. RM. 3,—.

Heft 4. D. Stranz, Untersuchungen der Himmelshelligkeit in der Umgebung der Sonne. RM. 3,90.

Heft 5. E. F. Effenberger, Kern- und Staubuntersuchungen am Collmberg. RM. 3,—.

Die Wetterlage von Mitte Dezember 1937 kann beschrieben werden durch Tropikluftvorstöße aus dem Mittelmeergebiet nach Norden und die Bildung und Wanderung einer typischen V^b-artigen Störung mit retrograder Zyklonenwanderung. Für diese Tage lag ein einigermaßen gut verteiltes Netz aerologischer Stationen vor, die Druck, Temperatur

und Feuchte bis in die Stratosphäre hinein gemessen haben. Es werden die Änderungen in der freien Atmosphäre bei dieser Wetterlage eingehend diskutiert. In dieser Hinsicht ist die Arbeit vorbildlich.

Tomczak hat auf dem Horstsee mit dem Gallenkampschen Verdunstungsmesser, der jeweils auf festen Tischen direkt über dem Wasser stand, die Verdunstung gemessen und ausführlich nach der Suttonschen Theorie verarbeitet. Die Gesamtverdunstung hängt außer von Wind, Größe der Wasserfläche und Dampfdruck wesentlich vom Turbulenzgrad der Luft ab. Für die Abhängigkeit von Wind und Flächengröße bestätigen sich die von Sutton angegebenen Potenzen, die Abhängigkeit vom Dampfdruck ist linear. Die Verdunstung einer Fläche F von der Länge x und Breite y (x in der Windrichtung), der Windgeschwindigkeit u, dem Sättigungsdampfdruck E, dem Dampfdruck der Luft e (in mm Hg) ist gegeben durch:

$$F = 0{,}30\, x\, y\, (E - e)\,(1 + 7{,}23\, u^{0{,}78}\, x^{-0{,}13}) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{g\,min^{-1}}.$$

Die Bedeutung dieser Beziehung für Talsperren, Stauseen wird erläutert.

Weitere Untersuchungen erstrecken sich auf den Turbulenzzustand der Luft, der wesentlich von dem vertikalen Temperaturgradienten abhängt, außerdem von der Luftmasse.

Der Austauschkoeffizient in 1 cm Höhe beträgt im Mittel $A = 1{,}97 \cdot 10^{-2}$ g/cm sec. Für die Rauhigkeit wurde der Prandtlsche Ansatz $z_0 = 1/30\, h$ bestätigt.

Reduktionen für die Verdunstungsmessung in beliebiger Höhe auf die Höhe $h = 0$ werden abschließend angegeben.

Auftreten und Auswirken der 72tägigen Welle auf der Nordhemisphäre in den beiden Wintern 1923/24 und 1924/25 untersucht Oehmisch. Zwei Zentren treten auf, eines im Atlantik, das zweite im Pazifik. Der Mechanismus der Welle wird durch Pulsationen der beiden Zentren mit nahezu entgegengesetztem Vorzeichen charakterisiert. Im Winter 1923/24 trat sie zusammen mit einer 36tägigen Welle auf und brachte Europa einen strengen Winter, während sie im Jahre 1924/25 an den subtropischen Hochdruckgürtel gekoppelt war und uns mildes Wetter brachte. Sie steuert kurzperiodische Schwingungen und erzeugt die Steuerungssymmetrie.

Stranz benutzt ein lichtelektrisches Photometer mit Selensperrschichtzellen unter Benutzung der Nullpunktsmethode und mit unmittelbarer Registrierung der Photoströme. Der Abfall der Himmelshelligkeit von 2° bis 15° Sonnenabstand wurde in 173 Meßreihen registriert. Dieser folgt einem Exponentialgesetz für den Winkelabstand $H\varphi = b e^{-\alpha \varphi}$. Die Konstanten hängen von der Luftrübung ab; nicht nur von der Zahl, sondern auch von der Gestalt und Größe der Teilchen. Zur Untersuchung der einzelnen Bereiche dienten Schottsche Rot- und Gelbfilter. An 10 Tagen zeigten sich Beugungserscheinungen in 5° und 10° Sonnenabstand, die mit bloßem Auge nicht erkennbar sind. Aus diesen Daten lassen sich die Radien der Streuteilchen berechnen (einige μ), es sind kleinste Dunstteilchen im Vorkondensationsstadium, was er auch experimentell im Laboratorium nachweisen konnte.

Weiter enthält diese Arbeit wichtige Beispiele vom täglichen Verlauf der Himmelsstrahlung und der Trübung sowie Turbulenz bei verschiedenen Wetterlagen.

Den Kern- und Staubgehalt der Atmosphäre in Abhängigkeit von den meteorologischen Faktoren untersucht E. Effenberger. Der Kerngehalt ist mittags am größten; der Staubgehalt in den Morgenstunden, vor Sonnenaufgang. Mit zunehmender relativer Feuchte nehmen sie beide zu, was der Koagulation zugeschrieben wird. Dabei wurde erstmalig ein registrierendes Konimeter für die Staubmessungen ausprobiert und die Präparate mit dem Registrierphotometer ausgewertet, was sich gut bewährt hat. R. Penndorf (Berlin)

Nachtrag zum Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1942

Universität Tübingen. **Back:** Experimentalphysik: Optik, Elektrizität, 4; Grundzüge der Meteorologie, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 4, für Fortgeschrittene (mit Verleger), 4 und 8; Wissenschaftliche Untersuchungen (mit Verleger), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Verleger und Kortüm), 2. — **Verleger:** Thermodynamik, mit Übungen, 4; Atomphysik, 1. — **Kneser:** Mechanik II, 4. —

Nachrichten

Diplom-Physiker und Diplom-Mathematiker. Diese neuen akademischen Grade werden vom 1. November 1942 ab an den deutschen Hochschulen eingeführt. Sie stehen dem bisherigen Diplom-Ingenieur gleich und können nach sieben Semestern Gesamtstudium erlangt werden, soweit der Bewerber sich in Seminarien und Laboratorien die Fähigkeit angeeignet hat, nach wissenschaftlichen Gesichtspunkten selbständig zu arbeiten. Im Anschluß an das Diplomexamen folgt dann in der Regel die Promotion.

Dozenturen: An der Universität Heidelberg Dr. Ernst Wiesenberger für Chemie, an der Universität Wien Dr. Hans Börsch für Experimentalphysik.

Ernannt: Der Dozent an der Universität Leipzig Dr. Theodor Förster zum o. Professor für Physikalische Chemie an der Universität Posen, der Dozent an der Universität Berlin Dr. Georg Richard Schultze zum o. Professor für organische und anorganische chemische Technologie an der Technischen Hochschule Braunschweig, der ao. Professor an der Universität Straßburg Dr. Karl Strubecker zum o. Professor der Mathematik daselbst, der Dozent Dr. Gerrit Bol zum ao. Professor für Mathematik an der Universität Greifswald, der ao. Professor an der Universität Hamburg Dr. Hans Heinrich Schlubach zum o. Professor der Chemie daselbst.

Vom Lehramt zurück: Der o. Professor für Geodäsie an der Landwirtschaftlichen Fakultät der Universität Bonn Dr. Paul Samel.

Gestorben: Der frühere o. Professor der Physik an der Universität Santiago de Chile Dr. Wilhelm Ziegler, der frühere o. Professor der Physikalischen Chemie an der Universität Berlin Dr. Max Bodenstein, der frühere o. Professor für chemische Technologie und ehemalige Rektor der Handelshochschule Königsberg Dr. Max Hessenland, der Leiter des Wissenschaftlichen Laboratoriums der I.G.-Farben-Industrie in Bitterfeld Dr. Robert Suchy.

Verantwortlicher Schriftleiter: i. V. Dr. Ludwig Bewilogua, Berlin. — Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. — Verlag S. Hirzel, Leipzig C 1, Königstr. 2. — Druck: Bibliographisches Institut AG., Leipzig. — Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 3. — Printed in Germany.